

Termín pro odevzdání: úterý 13. prosince 2022

1. Nalezněte **radiálně symetrické řešení** v $\mathbb{R}^+ \times M$ řešení vlnové rovnice

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0,$$

kde $M = \{x \in \mathbb{R}^3, \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$ je mezikulí. Počáteční podmínky jsou ve tvaru

$$u(0, r) = -\frac{\sin(2\pi r)}{r},$$

$$u_t(0, r) = 0,$$

a okrajové podmínky

$$u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{pro } r = \frac{1}{2} \text{ a } t > 0 \quad \text{a} \quad u + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{pro } r = 1 \text{ a } t > 0.$$

Nápověda:

- Postupem ze cvičení (přechodem do sférických souřadnic) přepište jako úlohu na úsečce pro novou neznámou $w(t, r) := ru(t, r)$.
- Nezapomeňte ztransformovat okrajové a počáteční podmínky.
- Data nové úlohy g **vhodně** (podle typu O.P.) prodlužte (na \tilde{g}_P) a zperiodizujte ($\tilde{g}_P * \delta_\Sigma$) a následně využijte vzorec odvozený na cvičeních

$$(w_F * (\tilde{g}_P * \delta_\Sigma))(t, r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(w_F)(t, n) c_n e^{2\pi i n r},$$

kde w_F je fundamentální řešení vlnové rovnice (v jedné prostorové dimenzi) a Fourierovský koeficient c_n se spočítá následovně

$$c_n = \frac{1}{L} \mathcal{F}(\tilde{g}_P)(n) = \frac{1}{L} \langle \tilde{g}_P, e^{-2\pi i r} \rangle,$$

kde L je perioda (prodloužených) dat a poslední rovnost chápeme ve smyslu působení distribuce \tilde{g}_P (která může, ale nemusí být regulární, ale má kompaktní nosič) na "testovačku" $e^{-2\pi i r}$ (z níž bychom korektní testovací fci udělali vhodným C^∞ seříznutím vně nosiče \tilde{g}_P).