1 Vlnová rovnice

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená a $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ spojitá, $u \in C^2(\Omega \times (0, \infty))$. Vlnovou rovnicí (s pravou stranou $f : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$) nazýváme rovnici

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = f.$$

Budeme uvažovat počáteční podmínky $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, tedy platnost podmínek

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,$$

a případně (Dirichiletovu) okrajovou podmínku $g : (\partial\Omega) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tedy platnost podmínky

$$u(x, t) = g(x, t), \quad (x, t) \in (\partial\Omega) \times [0, \infty).$$

Poznamenejme, že Δ zde vždy označuje Laplaceův operátor uvažovaný pouze v prostorových proměnných.

1.1 Sférické průměry a řešení vlnové rovnice na $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, $d = 1, 2, 3$

Nechť u řeší vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ s počátečními podmínkami u_0 a u_1. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}^d$ definujeme tzv. sférické průměry (jako funkci proměnných $r, t \in (0, \infty)$)

$$U(r, t) = \frac{1}{d\alpha_d r^{d-1}} \int_{S(x,r)} u(z, t) dS(z),$$

$$U_0(r) = \frac{1}{d\alpha_d r^{d-1}} \int_{S(x,r)} u_)(z) dS(z),$$

$$U_1(r) = \frac{1}{d\alpha_d r^{d-1}} \int_{S(x,r)} u_1(z) dS(z).$$

Zde α_d je objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$ a $S(x, r)$ je plocha parametrizující $\partial B(x, r)$.

Funkce U pak řeší tzv. Euler-Poisson-Darbouxovu rovnici

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{d-1}{r} U_r = 0$$

(za dodatečného předpokladů $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ pak i s počátečními podmínkami $U(r, 0) = U_0(r)$ a $U_t(r, 0) = U_1)$.

Pro dimenze $d = 1, 2, 3$, $f = 0$ a $\Omega = \mathbb{R}^d$ jsme postupně odvodili vzorce (pro $d = 2, 3$ jsme předpokládali $c = 1$)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1 \tag{1}$$

(tzv. d'Alambertův vzoreček)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,r)} \frac{tu_0(y) + t\nabla u_0(y) \cdot (y-x) + t^2 u_1(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy, \tag{2}$$

(tzv. Poissnovův vzoreček)

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x,r)} u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x) + tu_1(y)\, dS(y), \tag{3}$$

(tzv. Krchhoffův vzoreček)

Kromě Euler-Poisson-Darbouxovy rovnice byl základem odvození těchto vzorců ještě následující vzoreček pro řešení vlnové rovnice na polopřímce (s okrajovou podmínkou $u(0,t) = 0$, $t > 0$).

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1, & 0 \le ct < x \\ \frac{1}{2}\left[u_0(ct+x) - u_0(ct-x)\right] + \frac{1}{c}\int_{ct-x}^{ct+x} u_1, & 0 \le x \le ct \end{cases} \tag{4}$$

Zformulovali jsme následující tři věty o existenci řešení vlnové rovnice:

Věta 1 (Vlnová tovnice na přímce). *Nechť* $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, *potom funkce* u *daná rovnicí* (1) *splňuje*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{na } \mathbb{R} \times (0,\infty), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 2 (Vlnová tovnice pro $d = 2$). *Nechť* $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, *potom funkci* u *danou rovnicí* (2) *lze spojitě rozšířit na* $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$ *tak, že splňuje*

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Věta 3 (Vlnová tovnice pro $d = 3$). *Nechť* $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, *potom funkci* u *danou rovnicí* (3) *lze spojitě rozšířit na* $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ *tak, že*

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Poznamenejme, že ve výše uvedených větách je daná spojité rozšíření dokonce C^2 na $\mathbb{R}^2 \times [0,\infty)$, resp. $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

1.2 Jednoznačnost a energetické úvahy

Zpětný kužel - uvažujme $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ řešení rovnice $u_{tt} - \Delta u = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $T > 0$. Označme

$$K^- = \{(y,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\infty) : t \in [0,T],\ |x-y| \le T - t\}.$$

Pro $t \in [0,T]$ definujeme (lokální energii)

$$E(t) = \int_{B(x,T-t)} \frac{1}{2} u_t^2(y,t) + \frac{1}{2}|\nabla u|^2(y,t)\, dy.$$

Věta 4. *Funkce* E *je nerostoucí na* $[0,T]$.

Jako důsledek jsme dostali následující větu o jednoznačnosti

Věta 5. *Nechť* $u_0, u_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *a* $f : \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, *potom existuje nejvýše jedna funkce* $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$, *pro kterou platí*

$$u_{tt} - \Delta u = f, \quad \text{na } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$