1 Rovnice vedení tepla

Uvažujeme nejprve rovnici vedení tepla na $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ s počáteční podmínkou $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a pravou stranou $f : \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Hledáme tedy $u : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ spojitou, $u : \mathbb{R}^d \times (0,\infty)) \to \mathbb{R}$ řešící

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{na } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad x \in \Omega \times \{0\}, \end{aligned}$$

Poznamenejme, že Δ opét vždy označuje Laplaceův operátor uvažovaný pouze v prostorových proměnných.

Postupem který známe již z minulého semestru (využívajícím Fourierovu transformaci) jsme pro řešení výše uvedené úlohy odvodili předpis

$$u(x,t) = (u_0 * G_t)(x) + \int_0^t (f(\cdot,\tau) * G_{t-\tau})(x)\, d\tau, \tag{1}$$

kde

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi r)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

je tzv. **fundamentální řešení rovnice vedení tepla** (kde zpravidla dodefinujeme $G_t = 0$ pro $t < 0$).

Fundamentální řešení jsme následně odvodili i pomocí tzv. škálovací metody, kdy jsme si nejprve všimli, že je-li u řešením rovnice vedení tepla, potom je pro $\lambda > 0$ jejím řešení i funkce $(x,t) \mapsto u(\lambda x, \lambda^2 t)$, což nás "dovedlo" k pokusu hledat řešení (pro $d = 1$) ve tvaru

$$u(x,t) = t^{\frac{1}{2}} \cdot U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

pro neznámou funkci U.

Pro $I \subset \mathbb{R}$ interval a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřenou uvažme prostor funkcí $C_1^2(\Omega \times I)$ obsahující funkce $u : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ pro které platí, že u, u_t, u_{x_i} a $u_{x_i x_j}$ existují na $\Omega \times I$ a jsou tam i spojité.

Platí následující věta

Věta 1 (o řešení rovnice vedení tepla na $\mathbb{R}^d$)**.** *Nechť $u_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f \in C_1^2(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ a $f, f_t, f_{x_i}, f_{x_i x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$, potom pro u danou vzorcem* (1) *platí*

1. *$u \in C_1^2(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$,*
2. *$u_t - \Delta u = f$ na $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$,*
3. *u lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^d \times [0,\infty)$ a pro toto rozšíření platí $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.*

1.1 Věta o průměru a její důsledky

Uvažujme nyní rovnici $u_t - \Delta u = 0$ na obecné (otevřené) množine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ v časovém intervalu $(0, T)$. Funkcím, které tuto rovnici řeší se zpravidla říká **tepelně harmonické**.

Uvažme tzv. **časoprostorový** (parabolický) **válec**

$$\Omega_T = \Omega \times (0, T]$$

a jeho (parabolickou) hranici

$$\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T = ((\partial\Omega) \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\}).$$

Pro $r > 0$ a $(x, t) \in \Omega_T$ definujeme **tepelnou kouli** se středem (x, t) a poloměrem r předpisem

$$E(x, t, r) = \left\{ (y, \tau) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \tau \leq t, \quad G_{t-\tau}(y - x) \geq \frac{1}{r^d} \right\}.$$

Platí

Věta 2 (věta o průměru pro tepelně harmonické funkce)**.** *Nechť $u \in C_1^2(\Omega_T)$ a $u_t - \Delta u = 0$ na Ω_T, potom*

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^d} \int_{E(x,t,r)} u(y, \tau) \cdot \frac{|y - x|^2}{(t - \tau)^2} \, d(y, \tau),$$

kdykoliv $E(x, t, r) \subseteq \Omega_T$.

Poznámky a příklady. *1. (princip maxima) je-li $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, Ω omezená a $u_t - \Delta u = 0$ na Ω_T, potom*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T}$$

2. *(princip maxima) je-li $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, $u_t - \Delta u = 0$ na Ω_T, Ω souvislá a u nabývá maxima na $\overline{\Omega_T}$ v bodě $(x, \tau) \in \Omega_T$, potom je u konstantní na $\overline{\Omega_\tau}$.*

   V následujících dvou poznámkách bhdeme u množiny Ω navíc předpokládat, že je omezená a lze na ni aplikovat větu o divergenci (tj. ∂M je dostatečně regulární).

3. *(dopředná jednoznačnost pro rovnici vedení tepla) Úloha*

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \textit{na } \Omega_T, \\ u &= g \quad \textit{na } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad x \in \Omega \times \{0\}, \end{aligned}$$

   kde $g : \partial\Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$ a $u_0 : \Omega \times \{0\} \to \mathbb{R}$ jsou libovolné funkce má nejvýše jedno řešení v prostoru $C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$.

4. (zpětná jednoznačnost pro rovnici vedení tepla) Nechť pro $u, v \in C^2(\overline{\Omega_T})$ *platí*

$$u_t - \Delta u = v_t - \Delta v \quad \text{na } \Omega_T,$$
$$u = v \quad \text{na } \Omega \times \{T\} \cup \partial\Omega \times [0, T],$$

potom $u = v$ *na* $\overline{\Omega_T}$.