1 Laplaceova transformace

Symbolem L^+ budeme označovat prostor všech funkcí $f \in L^1_{loc}(0,\infty)$ pro které existuje $C \in \mathbb{R}$, že platí $e^{-Ct}f(t) \in L^1(0,\infty)$.

Poznámky a příklady. *1. L^+ je lineární prostor, tedy pro $A, B \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $f, g \in L^+$ platí $Af + Bg \in L^+$.*

2. pro $n \in \mathbb{N}$ a $f \in L^+$ platí $t^n f(t) \in L^+$

Lemma 1 (o definičním oboru Laplaceovy transformace)**.** *Pro každou funkci $f \in L^+$ existuje jednoznačně určené $C_f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, že:*

- *pro každé $\alpha > C_f$ platí $e^{-(\alpha+\beta i)t}f(t) \in L^1(0,\infty)$,*
- *pro každé $\alpha < C_f$ platí $e^{-(\alpha+\beta i)t}f(t) \notin L^1(0,\infty)$*

Poznámky a příklady. *3. platí $e^{-(C_f+\beta i)t}f(t) \notin L^1(0,\infty)$ buď pro všechna $\beta \in \mathbb{R}$, nebo pro žádné $\beta \in \mathbb{R}$.*

Definice 2 (Laplaceova transformace)**.** *Pro $f \in L^+$ definujeme Laplaceovu transformaci f (zn. $\mathcal{L}(f)$) předpisem*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt,$$

kdykoliv (tedy pro taková $s \in \mathbb{C}$, kdy) má výraz napravo smysl.

Poznámky a příklady. *4. Platí $D_{\mathcal{L}(f)} \supset \{\alpha + \beta i : \alpha > C_f\}$.*

5. (linearita $f \mapsto \mathcal{L}(f)$), je-li $A, B \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $f, g \in L^+$, potom

$$\mathcal{L}(Af + Bg)(s) = A\mathcal{L}(f)(s) + B\mathcal{L}(g)(s), \quad \Re(s) > \max(C_f, C_g).$$

6. (Laplaceova transformace jako Fourierova transformace) Pro $f \in L^+$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > C_f$ platí

$$\mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i) = \mathcal{F}(e^{-\alpha t}f(t))\left(\frac{\beta}{2\pi}\right).$$

7. (asymprotické chování $\mathcal{L}(f)$) Pro $f \in L^+$, $\alpha > C_f$ platí

$$\lim_{\beta \to \pm\infty} \mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i) = 0$$

. Dále platí

$$|\mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i)| \leq ||e^{-\alpha t}f(t)||_1 \to 0, \quad \alpha \to \infty.$$

8. (diferenfovatelnost $\mathcal{L}(f)$) Pro $f \in L^+$ je $\mathcal{L}(f)$ holomorfní na $\{\alpha + \beta i : \alpha > C_f\}$.

9. *(Laplaceova transformace škálování) Pro* $\alpha > 0$, $s > \alpha C_f$ *a* $f \in L^+$ *platí*

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(s) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

10. *(Laplaceova transformace posunutí) Pro* $\alpha > 0$, $f \in L^+$ *a*

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0; & t \le \alpha, \\ f(t-\alpha), & t > \alpha, \end{cases}$$

platí

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = e^{-\alpha s}\mathcal{L}(f)(s).$$

11. *Pro* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $f \in L^+$ *platí*

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s-\alpha), \quad \Re(s) > \Re(\alpha) + C_f.$$

12. *(Laplaceova transformace derivace) Pokud* $f, f' \in L^+$, $f(0+)$ *existuje vlastní, potom*

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0+) + s\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > \max(C_f, C_{f'}).$$

Alternativně, pokud $f \in C^1([0,\infty)$ *a* $f \in L^+$, *potom* $f' \in L^+$ *a platí*

$$\mathcal{L}(f')(s) = -f(0) + s\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f,$$

a speciálně, pokud $f(0) = 0$, *potom*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

Postup můžeme iterovat pro $f \in C^k([0,\infty)])$, *např. pro* $k = 2$ *dostaneme* $f', f'' \in L^+$ *a*

$$\mathcal{L}(f'')(s) = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

13. *(derivace* $\mathcal{L}(f)$*) Pro* $f \in L^+$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(\mathcal{L}(f))^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

14. *(Laplaceova transformace primitivní funkce) Pro* $f \in L^+$, $C_f > 0$ *a* $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ *platí* $F \in L^+$, $C_F \le C_f$ *a*

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s), \quad \Re(s) > C_f.$$

15. *(primitivní funkce k* $\mathcal{L}(f)$*) Pokud* $\frac{f(t)}{t} \in L^+$, *potom* $f \in L^+$ *a platí* $\mathcal{L}\left(-\frac{f(t)}{t}\right)$ *je primitivní funkcí k* $\mathcal{L}(f)$ *na* $\{\alpha + \beta i : \alpha > C_f\}$.

16. *(Laplaceova transformace konvoluce) Uvažme $f, g \in L^+$ rozšířené hodnotou 0 na intervalu $(-\infty, 0]$. Potom $f * g \in L^+$, přičemž platí*

$$f * g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau & , \quad t > 0, \\ 0 & , \quad t \le 0. \end{cases}$$

a $\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot (g)(s), \quad \Re(s) > \max(C_f, C_g)$.

17. *Pro $\gamma > -1$ platí*

$$\mathcal{L}(t^\gamma)(s) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{s^{\gamma+1}},$$

speciálně pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(t^n e^{\alpha t})(s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$$

18. *(prostota Laplaceovy transformace) Nechť $f \in L^+$ a existuje $\alpha > C_f$, že $\mathcal{L}(f)(\alpha + \beta i) = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom $f = 0$. Podobně, jsou-li $,gf \in L^+$ a existuje $\alpha > C_f, C_g$, že $\mathcal{L}(f-g)(\alpha+\beta i) = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom $f = g$.*

Uvažme následující dvě množiny funkcí

$$A = \{t^n e^{\alpha t} : n \in \mathbb{N}_0,\, \alpha \in \mathbb{C}\},$$

$$B = \left\{ \frac{P}{Q} : P, Q \text{ polynomy}, \deg P < \deg Q \right\}.$$

Věta 3 (o vzorech racionálních funkcí)**.** *Nechť $Q \in B$, potom existuje právě jedno $f \in \operatorname{lin} A$, že $\mathcal{L}(f) = P$ na množině $\{\alpha + \beta i : \alpha > C\}$, pro dostatečně velké C. Dále $\mathcal{L}(f) \in Q$ pro každé $f \in \operatorname{lin} A$.*

1.1 Inverzní Laplaceova transformace

Na začátku jsme pro inverzní Laplaceovu transformaci neformálně odvodili vzoreček

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(s) e^{st}\, ds,$$

kde integrál napravo je definován jako

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma|_{[-n,n]}} F(s) e^{st}\, ds,$$

kde $\gamma(u) = \alpha + ui$, $u \in \mathbb{R}$.

Věta 4 (o bodové rovnosti pro Laplaceovu transformaci). *Nechť $f \in L^+$ a nechť f je po částech spojitá a diferencovatelná na každém intervalu $[0, a]$, $a > 0$. Potom pto všechna $t \in \mathbb{R}$ a $\alpha > C_f$ platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \mathcal{L}(f)(s) e^{st}\, ds,$$

kde dodefinujeme $f = 0$ na $(-\infty, 0]$.

Věta 5 (o inverzi Laplaceovy transformace). *Nechť $F : \mathbb{C} \supset D_F \to \mathbb{C}$ je holomorfní na množině $M = \{\alpha + \beta i : \alpha > C\}$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}$. Nechť navíc existují $A, B \in \mathbb{R}$, že*

$$|F(s)| \leq \frac{a}{p^2}, \quad p \in M,\ |p| > b.$$

Potom existuje $f \in L^+$, že $F = \mathcal{L}(f)$ na M. Navíc platí

$$f(t) = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \mathcal{L}(f)(s) e^{st}\, ds.$$

Navíc platí, že f je spojitá na $\mathbb{R}$.