1 Laplaceova a Poissonova rovnice

Pro $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřenou a $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ spojitou, $u \in C^2(\Omega)$. uvažujeme rovnice (s pravou stranou $f : \Omega \to \mathbb{R}$)

$$-\Delta u = f \quad \text{(Poissonova rovnice)}$$

a

$$-\Delta u = 0 \quad \text{(Leplaceova rovnice).}$$

s Dirichletovou okrajovou podmínkou $g : (\partial\Omega) \to \mathbb{R}$, tedy platnost podmínky

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Neumannovu okrajovou podmínku bychom řešili podobnou metodou. Připomeňme ještě následující definici z minulého semestru

Definice 1 (harmonická funkce)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená a $u \in C^2(\Omega)$. Pokud $\Delta u = 0$ na Ω (tedy u splňuje Laplaceovu rovnici na Ω), potom u nazýváme harnonickou funkcí na Ω.*

1.1 Harmonické funkce

Základním poznatkem ohledně harmonockých funkcí pro ná bude následující věta o průměru (srovnejte s podobnou větou pro holomorfní funkce z minulého semestru)

Věta 2 (věta o průměru pro harmonické funcke)**.** *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená a $u \in C^2(\Omega)$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *u je harmonická na Ω,*
2. *pro $x \in \Omega$ a $r > 0$ splňující $B(x,r) \subseteq \Omega$ platí*

$$u(x) = \frac{1}{d\alpha_d r^{d-1}} \int_{S(x,r)} u(y) dS(y).$$

Poznámky a příklady. 1. *Podmínka (2) může být nahrazena podmínkou*

$$u(x) = \frac{1}{\alpha_d r^d} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

2. *(Liouvilleova věta) Je-li u omezená harmonická funkce na $\mathbb{R}^d$, potom u je konstantní.*
3. *Je-li u omezená harmonická funkce na Ω, potom $u \in C^\infty(\Omega)$ (dokonce reálně analytická na Ω).*
4. *(princip maxima/minima) Nechť Ω je otevřená souvislá a u harmomická na Ω. Pokud u nabývá maxima/minima na Ω, potom u je konstantní na Ω.*

5. *Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ omezená otevřená, u harmonická na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$, potom platí*
$$u \geq 0 \quad na\ \partial\Omega \implies u \geq 0 \quad na\ \Omega,$$
a analogicky pro opačnou (neostrou) nerovnost, případně rovnost.

6. *Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ omezená otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, potom existuje nejvýše jedna $u \in C^2(\Omega)$ a spojitá na $\overline{\Omega}$ řešící*
$$-\Delta u = f \quad na\ \Omega, \quad u = u_0 \quad na\ \partial\Omega.$$

7. *(Harnackova nerovnost) Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ omezená otevřená, $K \subset \Omega$ kompaktni, potom existuje konstanta C, že pro každou u nezápornou harmonickou funkci u na Ω platí*
$$\max_K u \leq C \min_K u.$$

1.2 Greenova funkce a Poissonovo jádro

V minulém semestru jsme nalezli tzv. fundamentální řešení Laplaceovy rovnice na $\mathbb{R}^d$ ve tvaru
$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{d(d-2)\alpha_d}|x|^{2-d}, & d > 2, \\ -\frac{1}{2\pi}\log|x|, & d = 2. \end{cases}$$
Platí $\Delta\Phi = \delta$ na $\mathbb{R}^d$. Pro $x \in \mathbb{R}^d$ definujme $\Phi_x : \mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ jako $\Phi_x(y) = \Phi(y-x)$. Platí tedy $\Delta\Phi_x = \delta_x$ na $\mathbb{R}^d$.

Pro pro Ω otevřenou a $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ jsme odvodili identitu
$$\int_\Omega u\Delta v = \int_\Omega v\Delta u + \int_{\partial\Omega}(u\nabla v - v\nabla u) \cdot \overrightarrow{dS}. \tag{1}$$
Odtud jsme pro $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ dostali tvrzení (někdy nazývané věta o třech potenciálech)
$$u(x) = -\int_\Omega \Phi_x\Delta u - \int_{\partial\Omega}(u\nabla\Phi_x - \Phi_x\nabla u) \cdot \overrightarrow{dS}. \tag{2}$$

Uvažme nyní funkci $\Phi_x^* \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ splňující
$$\Delta\Phi_x^* = 0 \quad \text{na } \Omega \quad \text{a} \quad \Phi_x^* = \Phi_x \quad \text{na } \partial\Omega.$$
Potom pomocí (1) a (2) dostaneme pro $G_x = \Phi_x - \Phi_x^*$ rovnost
$$u(x) = -\int_\Omega G_x\Delta u - \int_{\partial\Omega} u\nabla G_x \cdot \overrightarrow{dS}.$$
Speciálně, je-li u harmonická na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$ dostáváme
$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u\nabla G_x \cdot \overrightarrow{dS}.$$

Funkci $G(x,y) = G_x(y)$ nazýváme **Greenovou funkcí**, funkci $K(x,y) = -\nabla G_x(y)$ pak **Poissonovým jádrem** (pro Ω).

Pro případ $\Omega = U(0,1)$ jsme spočítali konkrétní tvary

$$\Phi_x^*(y) = \Phi(|x|y - \frac{x}{|x|}) \quad \text{a} \quad K(x,y) = \frac{1-|x|^2}{d\alpha_d|x-y|^d}.$$

Hedáme-li tedy na $U(0,1)$ řešení Laplaceovy rovnice s (Dirichletovou) okrajovou podmínkou u_0, dostaneme formuli ve tvaru

$$u(x) = \frac{1}{d\alpha_d}\int_{S(0,1)} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^d} u_0(y)dS(y). \tag{3}$$

Platí následující

Věta 3 (o řešení Laplaceovy rovnice na $U(0,1)$)**.** *Nechť u_0 je spojitá na $\partial U(0,1)$ potom pro funkci $u : U(0,1,) \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem* (3) *platí*

1. *$u \in C^\infty(\Omega)$,*
2. *$\Delta u = 0$ na $U(0,1)$,*
3. *u lze spojitě rozšířit na $B(0,1)$ a pro toto rozšíření platí $u = u_0$ na $\partial U(0,1)$.*

Poznámky a příklady.

Standardní substitucí snadno dostaneme Poissonovo jádro pro $U(0,R)$, $R > 0$ ve tvaru $I(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{d\alpha_d R|x-y|^d}$.

Poissonova rovnice má rovněž ekvivalentní formulaci v jazyce variačního počtu. Uvažme funkcionál

$$F(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu$$

na prostoru

$$X = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap D_F : u = u_0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Pokud $X \neq \varnothing$, potom platí, že u je řešením Poissonovy rovnice s okrajovou podmínkou u_0 a pravou stranou f právě tehdy, když u je minimem F na X.