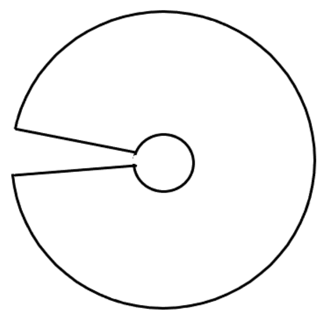
Početní část 2 - 7.6.2022

3. (a) Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx.$$
(b) Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx.$$
Návod: uvažujte integrál $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log^3 z}{(4+z^2)(1+z^2)}\,dz$, kde log je větev logaritmu s argumentem s hodnotami v $(-\pi,\pi)$ a γ je křivka naznačená na obrázku a využijte výsledek z předchozího bodu. U použité křivky nezapomeňte popsat její parametrizaci.

(12 bodů)



Řešení:

Funkce $f(z) = \dfrac{1}{(4+z^2)(1+z^2)}$ má pól násobnosti 1 ve bodech $\pm i, \pm 2i$. Snadno spočteme

$$\operatorname{Res}(f,\pm i) = \mp\frac{i}{6}, \quad \operatorname{Res}(f,\pm 2i) = \pm\frac{i}{12}.$$

Standardní aplikací Jordanova lemmatu tedy dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(z)\,dx\\ &= i\pi\left(\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,2i)\right)\\ &= i\pi\left(-\frac{i}{6}+\frac{i}{12}\right) = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Pro výpočet druhého integrálu uvažme $\varepsilon > 0$, $0 < r < R$ a křivku $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$, kde

$$\gamma_1(t) = (R - t + r)e^{i(\varepsilon+\pi)}, \quad t \in (r, R),$$
$$\gamma_2(t) = re^{-it}, \quad t \in (-\varepsilon - \pi, \varepsilon + \pi),$$
$$\gamma_3(t) = te^{-i(\varepsilon+\pi)}, \quad t \in (r, R),$$

a

$$\gamma_4(t) = Re^{it}, \quad t \in (-\varepsilon - \pi, \varepsilon + \pi).$$

Pro R dostatečně velké a ε, r dostatečně malá a $g(z) = \dfrac{\log^3 z}{(4+z^2)(1+z^2)}$ platí

$$\int_\gamma g(z)\,dz = i2\pi(\operatorname{Res}(g,i) + \operatorname{Res}(g,-i) + \operatorname{Res}(g,2i) + \operatorname{Res}(g,-2i))$$

Máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,\pm i) &= \log^3(\pm i)\operatorname{Res}(f,\pm i) \\
&= (\log|\pm i| + \arg(\pm i))^3 \operatorname{Res}(f,\pm i) \\
&= \left(\pm i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{\mp i}{6}\right) = -\frac{\pi^3}{48},
\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,\pm 2i) &= \log^3(\pm 2i)\operatorname{Res}(f,\pm 2i) \\
&= (\log|\pm 2i| + \arg(\pm 2i))^3 \operatorname{Res}(f,\pm 2i) \\
&= \left(\log 2 \pm i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{\pm i}{12}\right).
\end{aligned}$$

Nejdříve upravíme

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,2i) + \operatorname{Res}(g,-2i) &= \left(\log 2 + i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{i}{12}\right) + \left(\log 2 - i\frac{\pi}{2}\right)^3 \left(\frac{-i}{12}\right) \\
&= \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{4}\log^2 2.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\int_\gamma g(z)\,dz = i2\pi\left(-\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{4}\log^2 2\right) = -i\left(\frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{2}\log^2 2\right).$$

Na druhou stranu, pošleme-li nejdříve $\varepsilon \to 0+$ a potom $R \to \infty$ a $r \to 0+$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g(z)\,dz &= \int_{-\infty}^0 \frac{(\log|x| + i\pi)^3 - (\log|x| - i\pi)^3}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx \\
&= i6\pi \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx - i2\pi^3 \int_0^\infty \frac{1}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx
\end{aligned}$$

Zde jsme využili, že příspěvek γ_4 jde v limitě k 0 díky Jordanovu lemmatu a příspěvek γ_2 jde v limitě k 0 díky faktu, že maximum velikosti integrandu se chová jako $|\log^3 r|$, zatímco délka křivky jde k nule jako r^2.

Celkem tedy dostáváme

$$-i\left(\frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}\log^2 2\right)=i6\pi\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx+-i2\pi^3\cdot\frac{\pi}{12}.$$

což dává konečný výsledek

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{(4+x^2)(1+x^2)}\,dx=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{12}\log^2 2.$$

4. Uvažme funkci $f(z) = \dfrac{\tan z}{z^2(z-\pi)}$.

   (a) Dokažte, že f je holomorfní na svém definičním oboru a tento definiční obor určete.

   (b) Najděte všechny izolované singularity f v $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus D(f)$, určete typ těchto singularit a spočítejte v nich reziduum.

   (6 bodů)

Řešení:

Víme, že $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ a

$$\sin z = 0 \iff z = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Protože $(\sin z)' = \cos z$ a $(\cos z)' = -\sin z$ jde vždy o kořeny násobnosti 1.

Platí tedy, že funkce $\tan z$ má definiční obor $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ (a je na něm holomorfní, jako podíl dvou holomorfních funkcí), v bodech $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, má pól násobnosti 1 a v bodech $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, má kořen násobnosti 1.

Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-\pi)}$ má zjevně pól násobnosti 2 v bodě 0 a pól násobnosti 1 v bodě π.

Víme tedy, že $\tan z = z \cdot g(z)$ na okolí bodu 0, kde g je na tomoto okolí holomorfní a nenulová. Platí tedy, že $f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{g(z)}{z-\pi}$, což nám dává, že f má v bodě 0 pól násobnosti 1. Podobně nahlédneme, že f má v bodě π odstranitelnou singularitu. Protože $\frac{1}{z^2(z-\pi)}$ je nenulová a holomorfní na okolí všech bodů $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, dostáváme, že f má v těchto bodech pól násobnosti 1. Nakonec, f nemá v ∞ izolovanou singularitu, protože není definována na jeho prstencovém okolí.

Pro body ve tvaru $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, \frac{\pi}{2} + n\pi) &= \lim_{z \to \frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{\sin z}{z^2(z-\pi)} \frac{1}{(\cos z)'} \\
&= -\lim_{z \to \frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{1}{z^2(z-\pi)} \\
&= \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + n\pi)^2(\frac{\pi}{2} + n\pi - \pi)}.
\end{aligned}$$

Analogicky $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{\pi}$ a $\operatorname{Res}(f, \pi) = 0$.