Početní část 2 - 31.5.2022

3. (a) Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{1}{4+x^4}\,dx.$$

   (b) Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{4+x^4}\,dx.$$

(9 bodů)

Řešení:

Funkce $\dfrac{1}{4+z^4}$ má pól násobnosti 1 ve bodech $\pm 1 \pm i$ (všechny kombinace znamének). Reziduum v každém tomto pólu z je zřejmě $\dfrac{z}{4z^4} = -\dfrac{z}{16}$. Standardní aplikací Jordanova lemmatu tedy dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{4+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+x^4}\,dx \\ &= i\pi\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{4+x^4}, 1+i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{4+x^4}, -1+i\right)\right) \\ &= -\frac{i\pi}{16}(1+i-1+i) = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Druhý integrál spočítáme analogicky

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^2}{4+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+x^4}\,dx \\ &= i\pi\left(\operatorname{Res}\left(\frac{x^2}{4+x^4}, 1+i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{x^2}{4+x^4}, -1+i\right)\right) \\ &= \frac{i\pi}{8}(1-i-1-i) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. V prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ uvažme pro každé $n \in \mathbb{N}$ distribuce T_n a S_n definované předpisem

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{[-n,n] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \left(\frac{x}{n} + 1 \right) \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

a

$$\langle S_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} n e^{-|nx|} \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte T_n'. Výsledek vyjádřete jako lineární kombinaci Diracových a regulárních distribucí.

(b) Spočtěte limitu posloupnosti $\{T_n' + S_n\}$ ve smyslu konvergence v prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(9 bodů)

Řešení: Platí

$$\begin{aligned}
\langle T_n', \varphi \rangle &= \langle T_n, -\varphi' \rangle \\
&= -\int_{[-n,n] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \left(\frac{x}{n} + 1 \right) \varphi'(x) \, dx \\
&= -\left[\left(\frac{x}{n} + 1 \right) \varphi(x) \right]_{-n}^{-\frac{1}{n}} - \left[\left(\frac{x}{n} + 1 \right) \varphi(x) \right]_{\frac{1}{n}}^{n} + \frac{1}{n} \int_{[-n,n] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \varphi(x) \, dx
\end{aligned}$$

Tedy

$$T_n' = -\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \delta_{-\frac{1}{n}} + \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \delta_{\frac{1}{n}} - 2\delta_n + \frac{1}{n} T_f,$$

kde $f = \chi_{[-n,n] \setminus [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$.

Platí tedy $T_n' \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} 0$. Dále

$$\begin{aligned}
\langle S_n, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} n e^{-|nx|} \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} \varphi(\frac{t}{n}) \, dt \to \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} \varphi(0) \, dt \\
&= 2\varphi(0) [-e^{-t}]_0^\infty = 2\varphi(0),
\end{aligned}$$

kde záměnu limity a integrálu můžeme provést díky Lebesgueově větě (majoranta $e^{-|t|}$). Platí tedy $T_n' + S_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\to} 2\delta$..