Početní část 2 - 14.6.2022

3. Spočtěte hodnotu Fourierovy transformace funkce $f+g$ v bodě -1 (tedy $\mathcal{F}(f+g)(-1)$), kde

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(2\pi x), & x \in [-1,1], \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

a

$$g(x) = \frac{1}{x^2-2x+5}.$$

(9 bodů)

Řešení:

Počítáme dva integrály

$$\int_{-1}^{1} x\sin(2\pi x)\cdot e^{i2\pi x}\,dx \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi x}}{x^2-2x+5}\,dx.$$

První si rozložíme na reálnou a imaginární část a jeden člen vypadne kvůli lichosti (integrujeme přes symetrický interval)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x\sin(2\pi x)\cdot e^{i2\pi x}\,dx &= \int_{-1}^{1} x\sin(2\pi x)\cdot\cos(2\pi x)\,dx + i\int_{-1}^{1} x\sin(2\pi x)\cdot\sin(2\pi x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x\sin(2\pi x)\cdot\cos(2\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\sin(4\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-x\frac{\cos(4\pi x)}{4\pi}\right]_{-1}^{1} + 0 = -\frac{1}{4\pi}. \end{aligned}$$

Pro výpočet druhého integrálu využijeme reziduovou větu. Funkce má pól násobnosti 1 v bodech $1\pm 2i$, standardní aplikací Jordanova lemmatu tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi x}}{x^2-2x+5} &= i2\pi(\operatorname{Res}(\frac{e^{i2\pi z}}{z^2-2z+5}, 1+2i)) \\ &= i2\pi(-\frac{1}{4}ie^{-4\pi}) = \frac{1}{2}e^{-4\pi}\pi. \end{aligned}$$

Celkově dostáváme $\mathcal{F}(f+g)(-1) = -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2}e^{-4\pi}\pi$.

4. V prostoru regulárních distribucí na $\mathbb{R}$ nalezněte nějaké řešení rovnice

$$T''' - 6T'' + 5T' + 12T = 20\delta + T_{e^x},$$

kde δ značí Diracovu distribuci v bodě 0 a T_{e^x} značí regulární distribuci definovanou jako $\langle T_{e^x}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x)\,dx$.

(9 bodů)

Řešení:

Začneme s rovnicí

$$T''' - 6T'' + 5T' + 12T = 20\delta,$$

Pro $x < 0$ uvážíme řešení y v obecném tvaru $Ae^{-x} + Be^{3x} + Ce^{4x}$ a pro $x > 0$ řešení z ve tvaru $De^{-x} + Ee^{3x} + Fe^{4x}$

Potřebujeme

$$y(0) = z(0), \quad y'(0) = z'(0), \quad y''(0) = z''(0) - 20.$$

To nám dá rovnice

$$\begin{aligned} A + B + C &= D + E + F \\ -A + 3B + 4C &= -D + 3E + 4F \\ A + 9B + 16C &= D + 9E + 16F - 20. \end{aligned}$$

odečtením/přičtením první rovnice ke druhé resp. třetí dostaneme

$$\begin{aligned} A + B + C &= D + E + F \\ 4B + 5C &= 4E + 5F \\ 8B + 15C &= 8E + 15F - 20. \end{aligned}$$

odečtením dvojnásobku druhé rovnice od první dostaneme

$$\begin{aligned} A + B + C &= D + E + F \\ 4B + 5C &= 4E + 5F \\ 5C &= 5F - 20. \end{aligned}$$

Pak už jen postupně vyjádříme

$$\begin{aligned} A &= D - 1 \\ B &= E + 5 \\ C &= F - 4. \end{aligned}$$

Rovnice

$$T''' - 6T'' + 5T' + 12T = T_{e^x},$$

odpovídá standardní rovnici

$$y''' - 6y'' + 5y' + 12y = e^x.$$

Což je rovnice se speciální pravou stranou a řešení tedy hledáme ve tvaru $y(x) = Ae^x$. Snadno nahlédneme, že řešení hodnotě $A = 12$.

Celkem tedy dostáváme řešení zadané rovnice ve tvaru T_{f+g}, kde (volíme například $D = E = F = 0$)

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 5e^{3x} - 4e^{4x}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

a $g(x) = \dfrac{e^x}{12}$.