Početní část 1 - 14.6.2022

1. Uvažme 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou pro $x \in (-\pi, \pi]$ předpisem
$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
   (a) Rozviňte f v trigonometrickou Fourierovu řadu s periodou 2π.
   (b) Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konverganci této řady.
   (c) Dosazením vhodné hodnoty x určete součet řady
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4k^2+4k-3}.$$

   (9 bodů)

   Řešení:

   Funkce je sudá, koeficienty u $\sin(nx)$ budou tedy všechny nulové. Dále počítáme pro $n \neq 0, 2$
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2-n)x) + \cos((2+n)x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((2-n)x)}{2-n} + \frac{\sin((2+n)x)}{2+n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((2-n)\frac{\pi}{2})}{2-n} + \frac{\sin((2+n)\frac{\pi}{2})}{2+n} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{n \sin(\frac{\pi n}{2})}{4-n^2}. \end{aligned}$$
   Dále zřejmě $a_0 = 0$ a $a_2 = \frac{1}{2}$.

   Dále víme, že
$$\sin \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & \text{pro } n = 2k+1, \\ 0, & \text{pro } n = 2k. \end{cases}$$
   Dostáváme tedy
$$f(x) \sim \frac{2}{3\pi} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{4k^2+4k-3} \cos((2k+1)x).$$

Protože je f spojitá mimo body $\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ a po částech C^1 platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi : n \in \mathbb{N}\}$

$$f(x) = \frac{2}{3\pi}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{4k^2+4k-3}\cos((2k+1)x),$$

přičemž konvergence je lokálně stejnoměrná na všech intervalech. Po dosazení $x = 0$ dostáváme

$$1 = \frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{4k^2+4k-3}$$

a po úpravě

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2k+1}{4k^2+4k-3} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

2. Spočtěte integrál z funkce $\dfrac{z^{18}-z^{17}-4z^{16}-1}{(z^2-4)(z^{17}+1)}$ přes křivku $\gamma(t)=\frac{3}{2}e^{it}$, $t\in(0,2\pi)$. (9 bodů)

Řešení:

Místo reziduí v sedmnácti bodech uvnitř kruhu spočítáme rezidua v ± 2 a v ∞. Snadno spočítáme $\operatorname{Res}(f(z),\pm 2)=\mp\frac{1}{4}$. Dále použijeme vzoreček $\operatorname{Res}(f(z),\infty)=-\operatorname{Res}(f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0)$, máme

$$f(\tfrac{1}{z})\cdot\tfrac{1}{z^2}=\frac{\frac{1}{z^{18}}-\frac{1}{z^{17}}-\frac{4}{z^{16}}-1}{\left(\frac{1}{z^{17}}+1\right)\left(\frac{1}{z^2}-4\right)z^2}=\frac{z^{18}+4z^2+z-1}{z\,(4z^2-1)\,(z^{17}+1)}.$$

Odtud už snadno vidíme, že $\operatorname{Res}(f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0)=1$.

Celkově tedy dostáváme

$$\int_\gamma f=-i2\pi(\operatorname{Res}(f(z),2)+\operatorname{Res}(f(z),-2)+\operatorname{Res}(f(z),\infty))=-i2\pi(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1)=i2\pi.$$