Matematika pro fyziky NOFY162, LS 21/22

Ještě jeden příklad, co jsme nestihli

1. Najděte v $S'(\mathbb{R})$ řešení rovnice

$$y'' + a^2 y = \delta_0,$$

kde $a > 0$.

Nejprve spočteme klasická řešení homogenní rovnice. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + a^2 = 0$, má řešení $\lambda = \pm ai$, takže fundamentální systém můžeme napsat buď jako $\{e^{aix}, e^{-aix}\}$ nebo $\{\cos(ax), \sin(ax)\}$. Dále hledáme fundamentální řešení, ukážeme si to oběma metodami.

(1) Metodou lepení: položíme

$$y^-(x) = c^- e^{aix} + d^- e^{-aix},\ x < 0$$
$$y^+(x) = c^+ e^{aix} + d^+ e^{-aix},\ x \geq 0$$

Naše rovnice má stupeň 2, proto podmínky lepení jsou:

$$y^+(0+) - y^-(0-) = (c^+ + d^+) - (c^- + d^-) = 0$$
$$(y^+)'(0+) - (y^-)'(0-) = (aic^+ - aid^+) - (aic^- - aid^-) = 1$$

Bude šikovné si označit „skoky", tj. rozdíly konstant s plusem a minusem, obvykle se to značí pomocí Δ: $\Delta c = c^+ - c^-, \Delta d = d^+ - d^-$. Naše podmínky pak získají tvar

$$\Delta c + \Delta d = 0$$
$$ai(\Delta c - \Delta d) = 1$$

odkud snadno najdeme řešení $\Delta c = \frac{1}{2ai}, \Delta d = -\frac{1}{2ai}$. Fundamentální řešení tedy bude jakákoli funkce tvaru

$$y_L = \begin{cases} ce^{aix} + de^{-aix},\ x < 0 \\ (c + \frac{1}{2ai})e^{aix} + (d - \frac{1}{2ai})e^{-aix},\ x \geq 0 \end{cases}$$

s libovolnými reálnými konstantami c, d. Každé takovéto funkci tentokrát odpovídá regulární distribuce v $S'(\mathbb{R})$ (exponenciály mají ryze imaginární exponent, takže neutečou do nekonečna).

Pokud bychom chtěli, můžeme totéž vypočítat a vyjádřit pomocí goniometrických funkcí, zkuste si to sami!

(2) Fourierovou transformací: aplikujme $\mathcal{F}$ na zadanou rovnici, dostáváme tak

$$((2\pi i\xi)^2 + a^2)\mathcal{F}(y) = 1.$$

Polynom $P(\xi) = (2\pi i\xi)^2 + a^2 = (2\pi i)^2(\xi^2 + (\frac{ai}{2\pi})^2)$ má reálné kořeny $\xi_{1,2} = \pm\frac{a}{2\pi}$. Budeme tedy počítat zpětnou Fourierovu transformaci funkce $\frac{1}{(2\pi i\xi)^2+a^2}$, tj. $y(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ix\xi}}{(2\pi i\xi)^2+a^2}$, přičemž budeme muset oba tyto póly obejít.

Je-li $x > 0$, nakreslíme si křivku $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, kde φ_2, φ_3 obíhají póly $\pm\frac{a}{2\pi}$ (obě v záporném smyslu od $-\pi$ do 0 s malým poloměrem r), φ_4 je oblouk od 0 do π s velkým poloměrem R, a φ_1 sestává z tří úseček na reálné přímce, které to všechno propojují.

Přes tuto křivku budeme integrovat funkci $f(z) = \frac{e^{2\pi ixz}}{(2\pi iz)^2+a^2}$. Křivka neobíhá žádné póly, takže

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0.$$

V limitě $r \to 0+, R \to \infty$ pak

$$\int_{\varphi_1} \to y(x)$$

$$\int_{\varphi_4} \to 0 \text{ (Jordanovo lemma)}$$

$$\int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} \to -\pi i \left(Res(f(z), -\frac{a}{2\pi}) + Res(f(z), \frac{a}{2\pi})\right) = -\pi i \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{e^{-aix}}{-2ai} + \frac{e^{aix}}{2ai}\right) = -\frac{1}{2}\frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2ai}$$

Závěrem (po dodefinování v nule limitou zprava)

$$y^+(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2ai} = \frac{1}{2}\frac{\sin(ax)}{a},\ x \geq 0.$$

Pro $x < 0$ uděláme podobnou křivku v dolní polorovině a analogicky spočteme

$$y^-(x) = -\frac{1}{2}\frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2ai} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(ax)}{a},\ x < 0$$

a slepením y^+, y^- dostáváme jedno fundamentální řešení (říkejme mu třeba y_{FT}). Ostatní fundamentální řešení pak dostaneme přičítáním lineárních kombinací funkcí e^{aix}, e^{-aix}.

Vidíte, že funkce y_{FT} je opravdu v nule spojitá, ale její derivace nikoli?

Pro kontrolu porovnáme tento výsledek s výsledkem dosaženým pomocí lepení: když v řešení y_L nalezeném lepením zvolíme $c = -\frac{1}{4ai}, d = \frac{1}{4ai}$, dostáváme přesně řešení y_{FT} nalezené Fourierovou transfomací.

Lukáš Krump, 19.5.2022