

Funkce komplexní proměnné

Reziduová věta I

Věta: Nechť Γ je Jordanova křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem k svému vnitřku. Nechť a_1, a_2, \dots, a_k jsou body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\text{Int } \Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\text{Int } \Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, pak

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{a_j} f.$$

Věta: Je-li z_0 odstranitelnou singularitou f , pak $\text{Res}_{z_0} f = 0$.
Je-li z_0 pólem f , jehož násobnost je menší nebo $k \in \mathbb{N}$, pak

$$\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \right).$$

Speciálně, je-li z_0 pólem f , jehož násobnost je jedna a g je v z_0 holomorní, pak

$$\text{Res}_{z_0} (fg) = g(z_0) \text{Res}_{z_0} f.$$

Je-li z_0 kořenem f , jehož násobnost je jedna, a g je v z_0 holomorní a nenulové, pak

$$\text{Res}_{z_0} \left(\frac{g}{f} \right) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Použitím reziduové věty a pravidel pro počítání s rezidui spočtete následující integrály: (u křivkových integrálů se předpokládá, že se probíhají v kladném smyslu)

1. $\int_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4 + 1}$
2. $\int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$

4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$
5. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$
7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n}, \quad a > 0, b > 0, n \in \mathbb{N}$
8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$
9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}$
10. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{x^2 + b^2}, \quad a \in \mathbb{R}, b > 0$
11. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{x^4 - 5x^2 + 4}$
12. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$
13. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad a, b > 0$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - t)}, \quad a > 0, t \in \mathbb{R}$
15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6}$
16. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) dx}{1 + x^3}, \quad t \in \mathbb{R}$