Příklady na 1. týden

Funkce komplexní proměnné

Elementární funkce

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\cos(2+\mathrm{i})$ b) $\sin 2\mathrm{i}$ c) $\mathrm{tg}\,(2-\mathrm{i})$.

2. Dokažte, že pro $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

3. Dokažte, že pro $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
   a) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
   b) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
   c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   d) $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z$
   e) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$.

4. Nalezněte řešení rovnic:
   a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2\mathrm{i}$

5. Najděte součet $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta)$.

6. Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + \mathrm{i}v$, $z = x + \mathrm{i}y$ najděte
   a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
   b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
   c) vzory přímek $u = C$.

7. Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = \mathrm{e}^z$.

8. Najděte obraz $\mathrm{Im}\, z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.

9. Najděte obraz $|z+1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.

10. Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

11. Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty a, b a c, aby následující funkce byly holomorfní
a) $f(z) = x + ay + \mathrm{i}(bx + cy)$
b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + \mathrm{i} \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + \mathrm{i}y) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle z.

14. Dokažte, že platí
a) $(\sinh z)' = \cosh z$
b) $(\cosh z)' = \sinh z$
c) $(\sin z)' = \cos z$
d) $(\cos z)' = -\sin z$.

15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, je-li
a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y)$
b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
c) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.