

Sada příkladů 4/9

Distribuce

- Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:
 - $x^k D^n \delta_0$, $k, n \in \mathbb{N}$
 - $e^{ix\omega} D^n \delta_0$, $\omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- Zjednodušte zápis distribuce $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
 - $|x|^2 \Delta \delta_0$
 - $e^{i(x,\omega)} \Delta^k \delta_0$, $\omega \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}$
 - $e^{-a|x|^2} \Delta \delta_0$, $a > 0$
- Určete distribuce $\Delta T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:
 - $u(x) = |x|^\lambda$, $\lambda \geq 2 - N, N \geq 2$
 - $u(x) = \ln |x|$
- Dokažte: Nechť f je hladká funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_k = f_+^{(k)}(0) - f_-^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Potom

$$D^n T_f = T_{f^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k D^{n-1-k} \delta_0.$$

- Ukažte, že posloupnosti
 - $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}$
 - $g_n(x) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{4}}$
 - $h_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{x}$konvergují v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ k δ_0 distribuci.
- Ukažte, že

$$T_{\frac{1}{x-i0}} = T_{\text{p.v.} \frac{1}{x}} + i\pi \delta_0.$$