Sada příkladů 8/11

Funkce komplexní proměnné

Reziduová věta III

Použitím reziduové věty a pravidel pro počítání s rezidui spočtěte následující integrály: (ve smyslu Lebesgueově, Newtonově nebo ve smyslu hlavní hodnoty)

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x \,\mathrm{d}x}{x^2}$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x \,\mathrm{d}x}{x^3}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{ax} \,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x+2)}, \quad 0 < a < 2$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x} \,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)} \,\mathrm{d}x, \quad |a| < \pi$
6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{\cosh x} \,\mathrm{d}x, \quad a > 0$

   Výsledky následujících příkladů vyjádřete pomocí funkce Γ
7. $\displaystyle\int_0^\infty x^z \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x, \quad \operatorname{Re} z > -1$
8. $\displaystyle\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} \mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} z > 0$
9. $\displaystyle\int_0^\infty t^{z-1} \cos t \,\mathrm{d}t, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$
10. $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^p \,\mathrm{d}x, \quad p > 1$
11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p} \,\mathrm{d}x, \quad p > \frac{1}{2}$

7) $F(z) := \int_0^\infty x^z e^{-x^2}\, dx$, $\mathrm{Re}\, z > -1$

Pro ~~re~~ reálné z, tj. $z = s \in \mathbb{R}$, $s > -1$ je $\int_0^\infty x^s e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix} \right| = \int_0^\infty t^{s/2} e^{-t} \frac{dt}{2t^{1/2}} =$

$= \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{s-1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\left(\frac{s+1}{2}-1\right)} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$, kde $\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt$ pro $y > 0$.

Máme větu o holomorfním rozšíření fce Γ na $\{w \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, w > 0\}$ (Věta 20.10.4).

Pokud ukážeme, že $F(z)$ je holomorfní na stejné množině, pak z jednoznačnosti holomorfního rozšíření musí být $F(z) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$.

Věta o holomorfnosti integrálu záv. na parametru:
- $[a,b] \subset \mathbb{R}$
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená
- $f(t,z)$ spojitá na $[a,b] \times \Omega$
- $\forall t \in [a,b]$ je $f(t,z)$ holomorfní v Ω

Pak $F(z) := \int_a^b f(t,z)\, dt$ je holomorfní v Ω

Pro nás $f(t,z) = t^z e^{-t^2}$, ale nemáme omezený interval. Větu použijeme na $\left[\frac{1}{n}, n\right]$.
$\Omega = \{w \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, w > -1\}$. f je spojitá a pro pevné t je holomorfní v z $(t^z = e^{z \ln t})$.
$\Rightarrow F_n(z) = \int_{1/n}^n f(t,z)\, dt$ je holomorfní v Ω.

Musíme ukázat, že $F(z)$ je stejnoměrnou limitou $F_n(z)$: $\left| \int_0^\infty t^z e^{-t^2} dt - \int_{1/n}^n t^z e^{-t^2} dt \right| \leq$

$\leq \int_0^{1/n} |t^z e^{-t^2}|\, dt + \int_n^\infty |t^z e^{-t^2}|\, dt \leq \int_0^{1/n} e^{-t^2 + (\mathrm{Re}\, z)\ln t} dt + \int_n^\infty e^{-t^2 + \mathrm{Re}(z) \ln t} dt \leq \varepsilon$ pro dost

velké n. $\mathrm{Re}\, z > -1$ potřebujeme, aby $e^{(\mathrm{Re}\, z)\ln t} = t^{\mathrm{Re}\, z}$ byla integrovatelná fce u nuly.

$\Rightarrow F(z)$ je holomorfní $\Rightarrow F(z) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$

Zřejmě přesněji toto projde pro $\Omega = \{\mathrm{Re}\, w > -1 + \delta\}$ $\mathrm{Re}\, z > -1$
δ libovolné, pevné. Pak $F(z) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$ pro $\mathrm{Re}\, z > -1 + \delta$, δ lib. $\Uparrow$

---

8) $F(z) := \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{z-1} dt$, $\mathrm{Re}\, z > 0$. Opět pro reálná s, substituce $x = \ln \frac{1}{t}$
$dx = -\frac{1}{t} dt$

$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{s-1} dt = -\int_\infty^0 x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx = \Gamma(s)$. Odtud $F(z) = \Gamma(z)$ z

jednoznačnosti holomorfního rozšíření. $F(z)$ holomorfní podobně jako výše, $[a,b] = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$

a následně stejnoměrná limita $F_n(z) \rightrightarrows F(z)$

9) $\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\,dt = F(z)$ $\qquad$ Re $z\in(0,1)$

Z příkladu 13a) ze 4. série víme, že $F(s)=\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$ pro $s\in(0,1)$, $s\in\mathbb{R}$.

Jednoznačnost holom. rozšíření: $F(z)=\Gamma(z)\cos\frac{\pi z}{2}$, pokud je $F(z)$ holomorfní.

Opět použitím věty o integrálu, $[\alpha,\beta]=[\frac{1}{n},n]$, Ω pro jistotu Re $w\in(\delta,1-\delta)$, δ lib.

a stejnoměrná limita $F_n \rightrightarrows F$ na Ω.

---

10) $\int_0^\infty \cos x^p\,dx$, $p>1$ $\qquad$ Substituce $y=x^p$

$$dy = p x^{p-1}dx \Rightarrow dx = \frac{1}{p}y^{\frac{1}{p}-1}dy$$

$$\| $$

$\frac{1}{p}\int_0^\infty \cos y\, y^{\frac{1}{p}-1}dy = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$ dle předchozího příkladu $\left(p>1 \Rightarrow \frac{1}{p}\in(0,1)\right)$

---

11) $\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p}dx$, $p>\frac{1}{2}$ $\qquad$ Substituce $y=x^p$:

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty \sin y\, y^{\frac{1}{p}-2}dy = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}-1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{p}-1\right)\right)$$

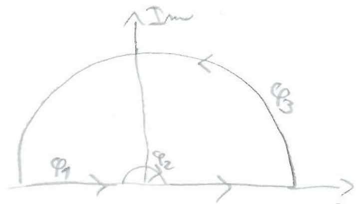
pro $\frac{1}{p}-1\in(0,1)$, tj. pro $\left.\begin{matrix}p<1\\ \text{a } p>1/2\end{matrix}\right\}p\in(\frac{1}{2},1)$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{\frac{1}{p}-1}\cdot\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)}}$$

Pro $p>1$: per partes: $\frac{1}{p}\int_0^\infty \sin y\, y^{\frac{1}{p}-2}dy = \frac{1}{p}\cdot\left[\sin y\,\frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{\frac{1}{p}-1}\right]_0^\infty - \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\frac{1}{p}-1}\int_0^\infty \cos y\, y^{\frac{1}{p}-1}dy =$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}}}$$



Pro $p=1$: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx}_{J}$

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$$

$\int_{\varphi_1} f(z)dz \to J$, $\int_{\varphi_2} f(z)dz \to iAb$, $b=-\pi$, $A=\lim_{z\to 0} e^{iz}=1 \Rightarrow \int_{\varphi_2} f(z)dz \to -i\pi$

$\int_{\varphi_3} f(z)dz \to 0$ Jordanem: $\alpha=1$, $M_R=\frac{1}{R}\to 0$. $\Rightarrow J-i\pi+0=0$ $\qquad$ $J=i\pi$

$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\, i\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$