Sada příkladů 6/11

Funkce komplexní proměnné

Reziduová věta I

Věta: Nechť Γ je Jordanova křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem k svému vnitřku. Nechť $a_1, a_2, \dots a_k$ jsou body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots a_k\}$, pak

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Věta: Je-li z_0 odstranitelnou singularitou f, pak $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.
Je-li z_0 pólem f, jehož násobnost je menší nebo $k \in N$, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \Big).$$

Speciálně, je-li z_0 pólem f, jehož násobnost je jedna a g je v z_0 holomorní, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0} \Big(fg \Big) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Je-li z_0 kořenem f, jehož násobnost je jedna, a g je v z_0 holomorní a nenulové, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0} \Big(\frac{g}{f} \Big) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Použitím reziduové věty a pravidel pro počítání s rezidui spočtěte následující integrály: (u křivkových integrálů se předpokládá, že se probíhají v kladném smyslu)

1. $\displaystyle\int_{x^2+y^2=2x} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$
2. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^3\,\mathrm{d}z}{2z^4+1}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2}$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n}, \qquad a > 0, b > 0,\ n \in \mathbb{N}$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{d}x}{x^2+b^2}, \qquad a \in \mathbb{R},\ b > 0$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\sin x\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^2+4}$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, \qquad a > 0$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \qquad a, b > 0$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x-t)}, \qquad a > 0,\ t \in \mathbb{R}$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(tx)\,\mathrm{d}x}{1+x^3}, \qquad t \in \mathbb{R}$

Funkce komplexní proměnné

Reziduová věta II

Použitím reziduové věty a pravidel pro počítání s rezidui spočtěte následující integrály: (ve smyslu Lebesgueově, Newtonově nebo ve smyslu hlavní hodnoty)

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t}, \quad a>1$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(a+b\cos t)^2}, \quad a>b>0$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{13+12\cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 t\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos\left((nt)-\sin t\right)\mathrm{d}t, \quad n\in\mathbb{N}$
6. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)\ \mathrm{d}t}{1-2a\sin t+a^2}, \quad -1<a<1,\, n\in\mathbb{N}$
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$
8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x}}$
9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(x+b)}, \quad 0<a<1,\, b\neq 0$
10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad 0<a<3$
11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{1-p}(1-x)^p\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2}, \quad -1<p<2$

12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p \,\mathrm{d}x}{x^2+1}, \quad -1 < p < 2$

13. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^{1-p}(1-x)^p \,\mathrm{d}x}{x^2+1}, \quad -1 < p < 2$

14. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$

15. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$

16. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x}}$

17. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{(x+1)^2\sqrt[3]{x}}$

1

11) V zadání je chyba. Zamýšleno bylo $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x \, dx}{x^4+5x^2+4}$

Póly: $x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4) = (x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)$

Stejné jako posledně: $I = \lim\limits_{R\to\infty} I_R = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4}\,dx$ $\qquad f(z) := \frac{z^3 e^{iz}}{z^3+5z^2+4}$

a zajímá nás $\operatorname{Im} f(z)$

$J_R = \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz$. Jordanovo lemma: $\alpha = 1$, $M_R \sim \frac{1}{R} \to 0 \Rightarrow J_R \to 0$

$\Rightarrow I = \operatorname{Im}\left(2\pi i(\operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{2i} f)\right)$ $\qquad \operatorname{Res}_i f = \frac{i^3 e^{i^2}}{2i\cdot 3i \cdot(-i)} = -\frac{1}{6e}$ $\qquad \operatorname{Res}_{2i} f = \frac{8i^3 e^{2i^2}}{3i\cdot i\cdot 4i} = \frac{2}{3e^2}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi(4-e)}{3e^2}$

12) $I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$. $\qquad I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}dx =: \tilde{I}\cdot\frac{1}{2}$ ze sudosti fce. $\qquad \alpha=1$, $M_R \sim \frac{1}{R^3}$

Opět stejná konstrukce: $f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$, $\tilde{I} = \lim\limits_{R\to\infty} I_R$, $J_R = \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} \to 0$. $\quad$ ia je 2-násobný pól uvnitř Γ

$\Rightarrow I = \operatorname{Im}(\pi i \operatorname{Res}_{ai} f)$ $\qquad \operatorname{Res}_{ai} f = \lim\limits_{z\to ai}\left(\frac{z e^{iz}}{(z+ai)^2}\right)' = \left[\frac{e^{iz}+ize^{iz}}{(z+ai)^2} - \frac{2ze^{iz}}{(z+ai)^3}\right]_{z=ai}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi e^{-a}}{4a}$ $\qquad = \frac{e^{-a}(1-a)}{-4a^2} - \frac{2ai e^{-a}}{-8a^3 i} = \frac{e^{-a}}{4a^2}\cdot[-1+a+1] = \frac{e^{-a}}{4a}$

13) $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $\quad a,b>0$. $\quad$ Opět $\underbrace{I = \frac{1}{2}\tilde{I}}_{\text{ze sudosti}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $\qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$

$\tilde{I} = \lim I_R$, $J_R = \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz \to 0$ z Jordanova lemmatu, $\alpha=1$, $M_R \sim \frac{1}{R^4}$

Póly: ai, bi uvnitř Γ $\Rightarrow I = \operatorname{Re}\left(\pi i(\operatorname{Res}_{ai} f + \operatorname{Res}_{bi} f)\right)$ $\qquad \operatorname{Res}_{ai} f = \frac{e^{ai^2}}{2ai(b^2-a^2)} = \frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)}$

$\operatorname{Res}_{bi} f = \frac{e^{bi^2}}{2bi(a^2-b^2)} = \frac{-e^{-b}}{2bi(b^2-a^2)}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2(b^2-a^2)}\cdot\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right)$ ... to ale jen pro $a \neq b$!

Pro $a=b$: ai je 2-násobný pól: $\operatorname{Res}_{ai} f = \lim\limits_{z\to ai}\left(\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2}\right)' = \left[\frac{ie^{iz}}{(z+ai)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z+ai)^3}\right]_{z=ai}$

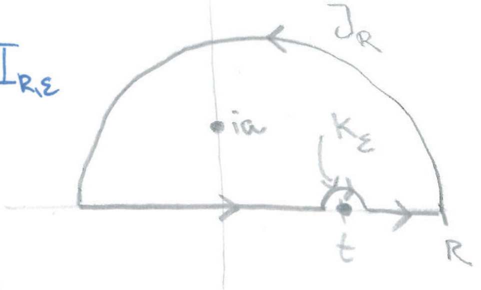
$= \frac{ie^{-a}}{-4a^2} - \frac{2e^{-a}}{-8a^3 i} = \frac{e^{-a}(1+a)}{4a^3 i}$

$\Rightarrow I = \operatorname{Re}(\pi i \operatorname{Res}_{ai} f) = \frac{\pi e^{-a}(1+a)}{4a^3}$

14) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-t)}$ $a>0,\ t\in\mathbb{R}.$

Nový typ příkladu! Kořen jmenovatele je na reálné ose ⇒ integrál v klasickém smyslu neexistuje

Lze ale spočítat integrál ve smyslu hlavní hodnoty



$$I = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{-R}^{t-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{t+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} I_{R,\varepsilon}$$

V komplexní rovině počítáme takto - - - - - - - - - - -

$$J_R = \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz.$$ Jordanovo lemma: $\alpha=0,\ M_R \sim \frac{1}{R^3} \Rightarrow J_R \to 0$

Nový prvek: $K_\varepsilon = \int_{\varphi_2} f(z)\,dz$, kde $\varphi_2(s) = t + e^{is}$, $s\in(\pi, 0)$

t je pól f násobnosti 1. Máme lemma o obkružování takového pólu ⇒ $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = iA\cdot(-\pi)$,

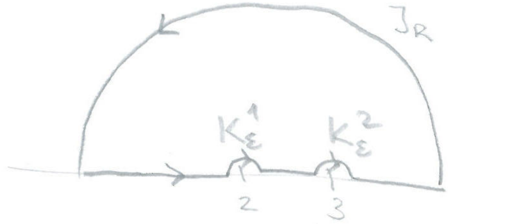
kde $A = \lim_{z\to t} (z-t) f(z) = \frac{1}{t^2+a^2} \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = \frac{-i\pi}{t^2+a^2}$

$$I + \lim_{R\to\infty} J_R + \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = 2\pi i \operatorname{Res}_{ai} f \qquad \operatorname{Res}_{ai} f = \frac{1}{2ai(ai-t)} = \frac{-(ai+t)}{2ai(t^2+a^2)}$$

$$I - \frac{i\pi}{t^2+a^2} = \frac{-\pi}{a}\cdot\frac{t+ai}{t^2+a^2} \Rightarrow \underline{\underline{I = \frac{-\pi t}{a(t^2+a^2)}}}$$

---

15) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{x^2-5x+6}$ $f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z-2)(z-3)}$



f je holomorfní uvnitř Γ

$$I = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x+6} = \operatorname{Re}\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \operatorname{Re} \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{-R}^{2-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{2+\varepsilon}^{3-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{3+\varepsilon}^{R} f(x)\,dx$$

$J_R = \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz \to 0$ dle Jordana $\alpha=1,\ M_R \sim \frac{1}{R}$

$K_\varepsilon^1 = \int_{\varphi_2} f(z)\,dz$, kde $\varphi_2(s) = 2 + e^{is}$, $s\in(\pi, 0)$, dle LOOPN1: $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon^1 = -i\pi A^1$, $A^1 = -2e^{2i}$ $\Big\}$ $\lim K_\varepsilon^1 = 2i\pi e^{2i}$

K_ε^2 analogicky: $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon^2 = -i\pi A^2$, kde $A^2 = 3e^{3i} \Rightarrow \lim K_\varepsilon^2 = -3i\pi e^{3i}$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + 2i\pi e^{2i} - 3i\pi e^{3i} = 0$$

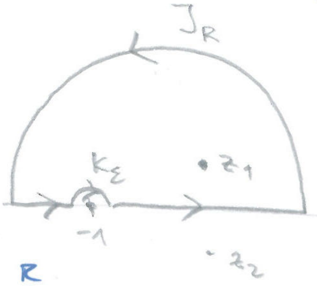
$$\Rightarrow I = \pi \operatorname{Re}\left(3ie^{3i} - 2ie^{2i}\right) = \pi \operatorname{Re}\left(3i(\cos 3 + i\sin 3) - 2i(\cos 2 + i\sin 2)\right)$$

$$= \underline{\underline{\pi(2\sin 2 - 3\sin 3)}}$$

16) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx \, dx}{1+x^3}$ $f(z) = \frac{e^{tiz}}{1+z^3}$

Kořeny jmenovatele: $e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi)}$ $k=0,1,2$, tj. $\overset{z_{1,2}}{\overbrace{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}}$ a -1

$1+z^3 = (1+z)(z-z_1)(z-z_2) = (z+1)(z^2-z+1)$



Opět počítáme ve smyslu hlavní hodnoty $I = \mathrm{Re} \lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(z)dz + \int_{-1+\varepsilon}^{R} f(z)dz$

J_R ... Jordanem $\alpha = t$, $M_R \sim \frac{1}{R^3} \Rightarrow J_R \to 0$ a to i pro $t=0$.

K_ε ... dle LOOPN1 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = -i\pi A$, kde $A = \frac{e^{-ti}}{3} \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = -\frac{i\pi}{3}e^{-ti}$

$$I + \mathrm{Re}\left(-\frac{i\pi}{3}e^{-ti}\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i \, \mathrm{Res}_{z_1} f\right) = \mathrm{Re}\left(2\pi i \cdot \frac{e^{ti(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}}{(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\sqrt{3}i)}\right)$$

$$\Rightarrow I = \mathrm{Re}\left[\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+i} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}} \cdot \left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right) + \frac{i\pi}{3}(\cos t - i\sin t)\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{4} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \cdot \left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right) + \frac{i\pi}{3}(\cos t - i\sin t)\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{3} \cdot \left[e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \cdot \left(\sqrt{3}\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right) + \sin t\right]}}$$

---

1) $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}$ $a>1$

Nový typ integrálu! Obecný postup pro $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$, kde R je racionální fce

Převádíme na integrál přes jednotkovou kružnici v $\mathbb{C}$: $\varphi: z = e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$

$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$

$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$

$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

póly: $z^2+2az+1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2-4}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$

$a>1 \Rightarrow D>0 \Rightarrow$ 2 reálné kořeny
jeden vně kružnice, druhý uvnitř

$I = \frac{2}{i} 2\pi i \, \mathrm{Res}_{-a+\sqrt{a^2-1}} f$, kde $f = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$

$$I = 4\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}}}$$

④

2) $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$ $\quad a > b > 0$

$$\overset{\shortparallel}{\int\limits_{|z|=1}} \frac{1}{\left(a+b\,\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\,\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(2a+bz+bz^{-1})^2 z} = \frac{4}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(bz^2+2az+b)^2}$$

$bz^2+2az+b = b(z-z_1)(z-z_2)$

Korene: $z_{1,2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}$ $\quad \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow$ 2 reálne korene, jeden vne kruhu, druhý vnútri

$$I = \frac{4}{i}\,2\pi i \operatorname{Res}_{-\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} f = 8\pi \cdot \lim_{z\to z_1} \left(\frac{z}{b^2(z-z_2)^2}\right)' = \frac{8\pi}{b^2}\cdot\left(\frac{1}{(z_1-z_2)^2} - \frac{2z_1}{(z_1-z_2)^3}\right) =$$

$$= \frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{1}{4\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)} - \frac{2\left(-\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)}{8\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)^{3/2}}\right) = \frac{2\pi a}{b^3\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)^3}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$$

---

3) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{13+12\cos t}\,dt = \int\limits_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}{13+12\,\frac{z+z^{-1}}{2}}\,\frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i}\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+2+z^{-2}}{6z^2+13z+6}\,dz = \frac{1}{4i}\int\limits_{|z|=1} \underbrace{\frac{z^4+2z^2+1}{6z^4+13z^3+6z^2}}_{f(z)}\,dz$

Póly: $z=0$ dvojnásobný, $\quad 6z^2+13z+6=0$, $\quad z_{1,2} = \frac{-13\pm\sqrt{25}}{12} = -\frac{13}{12} \pm \frac{5}{12} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

vnútri kruhu je z_1 jednonásobný pól

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_{z_1} f\right)$.

$$\operatorname{Res}_0 f = \left(\frac{z^4+2z^2+1}{6z^2+13z+6}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{(4z^3+4z)\cdot(\ldots) - (z^4+2z^2+1)(12z+13)}{(\ldots)^2}\Bigg|_{z=0} = \frac{-13}{36}$$

$$\operatorname{Res}_{z_1} f = \frac{(z_1^2+1)^2}{6z_1^2\cdot(z_1-z_2)} = \frac{(z_1^2+1)^2}{5\,z_1^2} = \frac{\frac{169}{81}}{5\cdot\frac{4}{9}} = \frac{169}{180}$$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{104}{180} = \frac{13\pi}{45}$

---

4) DÚ

5) $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(nt - \sin t)\, dt$

Atypický případ!! Využijeme $\cos X = \mathrm{Re}\, e^{iX}$: $I = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} e^{\cos t} e^{i(nt - \sin t)} dt =$

$= \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} e^{\cos t - i \sin t} \cdot e^{int} dt$

kružnice se obíhá záporně!

$= \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} e^{e^{-it}} e^{int} dt \quad \Big/ \; z = e^{-it},\; dz = -i e^{-it} dt$

záporná orientace

$\Rightarrow I = -\mathrm{Re} \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} \frac{dz}{-iz} = \mathrm{Re} \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z\, dz}{z^{n+1}}$ ... $z=0$ je pól násobnosti $n+1$, $f(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}}$

$\mathrm{Res}_0 f = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{n!} e^z\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{n!} e^0 = \frac{1}{n!} \Rightarrow I = \mathrm{Re}\, \frac{1}{i} 2\pi i \cdot \frac{1}{n!} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{n!}}}$

---

6) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)\, dt}{1 - 2a \sin t + a^2} = \mathrm{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{1 - 2a\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) + a^2} dt \quad \Big| \; z = e^{it},\; dz = i e^{it} dt$

$= \mathrm{Im} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{-az^2 + (a^2+1) iz + a} dz = -\frac{1}{a} \mathrm{Im} \int_{|z|=1} \overbrace{\frac{z^n}{z^2 - i\left(a + \frac{1}{a}\right) z - 1}}^{f(z)} dz$

Kořeny jmenovatele: $z_{1,2} = \frac{i\left(a+\frac{1}{a}\right) \pm \sqrt{-\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) + 4}}{2} = \frac{i\left(a+\frac{1}{a}\right) \pm i\left(a - \frac{1}{a}\right)}{2} = \begin{cases} ia = z_1 \\ i \cdot \frac{1}{a} = z_2 \end{cases}$

Protože $|a| < 1$, je z_1 uvnitř kruhu a z_2 vně.

$\Rightarrow I = -\frac{1}{a} \mathrm{Im}\, 2\pi i\, \mathrm{Res}_{ia} f = -\frac{1}{a} \mathrm{Im}\, 2\pi i \cdot \frac{(ia)^n}{i\left(a - \frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2} \mathrm{Im}\, i^n$

$n = 2k$: $i^n \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Im}\, i^n = 0$

$n = 2k+1$: $i^n = i^{2k+1} = i(-1)^k \Rightarrow \mathrm{Im}\, i^n = (-1)^k$

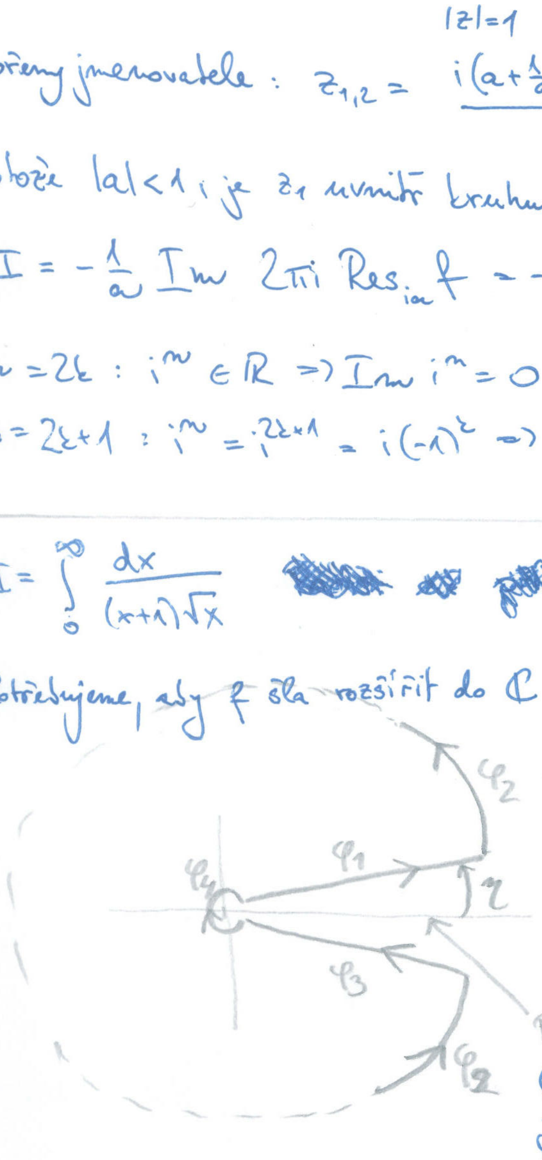
$\Bigg\} \Rightarrow \underline{I = 0}$ pro $n = 2k$

$I = \frac{(-1)^k 2\pi a^{2k+1}}{1 - a^2}$ pro $n = 2k+1$

---

7) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ Nový typ příkladu!! $\int_0^\infty x^{\alpha - 1} f(x)\, dx$, $\alpha \in (0,1)$

Potřebujeme, aby f šla rozšířit do $\mathbb{C}$ jako holomorfní až na konečně mnoho bodů a $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|}$ (mimo počátek?)



$\varphi_1 : z = t \cdot e^{i\eta}$, $t \in [\varepsilon, R]$

$\varphi_2 : z = R e^{it}$, $t \in [\eta, 2\pi - \eta]$

$\varphi_3 : z = t \cdot e^{i(2\pi - \eta)}$, $t \in [R, \varepsilon]$

$\varphi_4 : z = \varepsilon e^{it}$, $t \in [2\pi - \eta, \eta]$

a provedeme limitu $\varepsilon \to 0_+$, $R \to \infty$, $\eta \to 0_+$

$\int_{\varphi_1} z^{\alpha-1} f(z) dz$ je to, co chceme: $= \int_\varepsilon^R \underbrace{(te^{i\eta})^{\alpha-1}}_{= |te^{i\eta}|^{\alpha-1} \cdot e^{i(\alpha-1)\cdot \mathrm{Arg}(te^{i\eta})} = t^{\alpha-1} \cdot e^{i(\alpha-1)\eta} \to t^{\alpha-1}} \overbrace{f(te^{i\eta})}^{\to f(t)} \overbrace{e^{i\eta}}^{\to 1} dt \to \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha-1} f(t) dt}_{I}$

$\int_{\varphi_2} z^{\alpha-1} f(z)\,dz \to 0$ dle Jordanova lemmatu, protože $M_R \sim \frac{1}{R}\cdot R^{\alpha-1}$, tj. $RM_R \sim R^{\alpha-1} \to 0$

$$\int_{\varphi_3} \dots = \int_R^{\varepsilon} \underbrace{\left(t\cdot e^{i(2\pi-\eta)}\right)^{\alpha-1}}\ \underbrace{f\left(t e^{i(2\pi-\eta)}\right)}_{\to f(z)}\ \underbrace{e^{(2\pi-\eta)i}}_{\to 1}\,dt$$

$$\hookrightarrow = \underbrace{\left|t e^{i(2\pi-\eta)}\right|^{\alpha-1}}_{=t^{\alpha-1}}\cdot e^{i(\alpha-1)\cdot \overbrace{\mathrm{Arg}\left(t\cdot e^{(2\pi-\eta)i}\right)}^{\to 2\pi}} \longrightarrow t^{\alpha-1}\cdot e^{2\pi i(\alpha-1)} = t^{\alpha-1}e^{2\pi i\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi_3} z^{\alpha-1}f(z)\,dz \longrightarrow -e^{2\pi i\alpha}\int_0^\infty t^{\alpha-1}f(t)\,dt = -e^{2\pi i\alpha}\, I$$

$\int_{\varphi_4} z^{\alpha-1}f(z)\,dz = \int_{2\pi-\eta}^{\eta} \left(\varepsilon e^{it}\right)^{\alpha-1} f\left(\varepsilon e^{it}\right) i\varepsilon e^{it}\,dt$ a $|\dots| \le 2\pi\cdot\varepsilon^{\alpha}\cdot \overbrace{\max_{|z|\le\varepsilon}|f(z)|}^{\le C \text{ protože v počátku není pól}} \longrightarrow 0$

Celkem: $I\cdot\left(1-e^{2\pi i\alpha}\right) = 2\pi i\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_j}\left(z^{\alpha-1}f(z)\right) \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\cdot\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_j}\left(z^{\alpha-1}f(z)\right)$

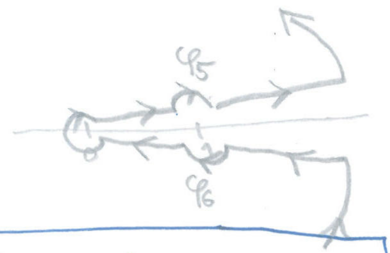
V našem příkladě: $\alpha=\frac12$ a jediný pól v bodě $z=-1$ $\Rightarrow I = \frac{2\pi i}{1-(-1)}\cdot \mathrm{Res}_{-1}\left(\frac{1}{(z+1)\sqrt z}\right)$

$$= \pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi i}{i} = \pi$$

Musíme brát větev odmocniny, kterou jsme použili v odvození !

---

8) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt x\,(x-1)}$ ... Problém navíc ! pól $z=1$ leží na polopřímce, kde integrujeme, musíme jej obkroužit a počítat integrál ve smyslu ~~vlastní~~ hlavní hodnoty



Oproti předchozímu máme navíc

$\varphi_5: z = 1+\varepsilon\cdot e^{it}$, $t\in[\pi-\delta_1(\eta), \delta_2(\eta)]$

$\varphi_6: z = 1+\varepsilon\cdot e^{it}$, $t\in[2\pi-\delta_2(\eta), \delta_1(\eta)+\pi]$, kde $\delta_1(\eta)\to 0$, $\delta_2(\eta)\to 0$ pro $\eta\to 0$

Podívejte se na důkaz LOOPN1 a přesvědčte se, že jej můžeme zopakovat, i když máme slabší předpoklady → musíme ale rozlišovat hodnoty $z^{\alpha-1}$ shora a zespodu.

Podle LOOPN1 čekáme $\int_{\varphi_5} \longrightarrow iAb$, kde b je úhel, který v našem případě jde k $-\pi$ pro $\eta\to 0_+$ a A je limita výrazu $\frac{1}{\sqrt z}$ (obecně $z^{\alpha-1}$). Ale pozor, tady je to limita "shora", protože kroužíme nad polopřímkou nespojitosti.

Proto $\int_{\varphi_5}\frac{dz}{\sqrt z\,(z-1)} \longrightarrow -i\pi$

φ_6 analogicky, opět $b\longrightarrow -\pi$ a A je limita výrazu $\frac{1}{\sqrt z}$, zde ale "zespodu" !

zespodu je $\sqrt1=-1$ a proto $\int_{\varphi_6}\frac{dz}{\sqrt z\,(z-1)} \longrightarrow i\cdot(-1)\cdot(-\pi) = \pi i$

$\varphi_1,\dots,\varphi_4$ stejné jako v příkladu 7), f nemá póly uvnitř Γ. Máme tak $I\cdot(1-(-1)) + (-i\pi)+i\pi = 0$

$2I = 0$

$\underline{\underline{I = 0}}$

9) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^a(x+b)}$ $\quad 0<a<1,\ b\neq 0$

Musíme rozlišit $b>0$ a $b<0$. Nejprve nechť $b>0$. Pak je to doslovná analogie příkladu č. 7), pól je v bodě $z=-b$ a $\mathrm{Res}_{-b} \frac{1}{z^a(z+b)} = \frac{1}{(-b)^a} = \frac{1}{b^a}\cdot\frac{1}{e^{ia\pi}}$

$\int_{\varphi_2} \to 0$ z Jordanova lemmatu, protože $M_R \sim \frac{1}{R^{a+1}}$

$\int_{\varphi_4} \to 0$ protože $\frac{1}{z+b}$ je omezená na okolí počátku a připočítání vyleze $\frac{1}{\varepsilon^a}\cdot\varepsilon \to 0$

Máme tak $I\cdot\left(1-e^{2\pi i(1-a)}\right) = 2\pi i \frac{1}{b^a e^{ia\pi}}$ $\quad \alpha = 1-a$

$$I = \frac{2\pi i}{b^a\cdot e^{ia\pi}\cdot\left(1-e^{-2\pi i a}\right)} = \frac{2\pi i}{b^a\cdot\left(e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}\right)} = \underline{\underline{\frac{\pi}{b^a \sin(a\pi)}}}$$

$b<0 \Rightarrow$ doslovná analogie př. 8) Nemáme póly uvnitř Γ, ale musíme obkružovat pól na reálné ose

$\int_{\varphi_5} \to iAb$, kde $b=-\pi$ a A je limita v bodě $z=-b$ shora, což je prostě $|b|^{-a}$

$\Rightarrow \int_{\varphi_5} \to -i\pi\,|b|^{-a}$

$\int_{\varphi_6} \to iAb$, kde $b=-\pi$ a A je limita v bodě $z=-b$ zdola, to je $\frac{1}{|b|^a\cdot e^{2\pi i a}}$

$\Rightarrow \int_{\varphi_6} \to -i\pi\cdot|b|^{-a}\cdot\frac{1}{e^{2\pi i a}}$

Celkem: $I\left(1-e^{-2\pi i a}\right) = i\pi\,|b|^{-a}\cdot\left(1+\frac{1}{e^{2\pi i a}}\right) = \frac{i\pi\left(e^{2\pi i a}+1\right)}{|b|^a\cdot\left(e^{2\pi i a}-1\right)} =$

$$= \frac{\pi}{|b|^a}\cdot\frac{e^{\pi i a}+e^{-\pi i a}}{e^{\pi i a}-e^{-\pi i a}}\cdot\frac{2i}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{|b|^a}\frac{\cos(\pi a)}{\sin(\pi a)}}}$$

---

10) $I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$ $\quad 0<a<3$. Analogie př. 7): póly záporné $\Rightarrow$ nemusíme obkružovat

$\int_{\varphi_2} \to 0$ Jordanem: $M_R \sim \frac{R^{a-1}}{R^3} \Rightarrow RM_R \sim R^{a-3}$ a potřebujeme $a-3<0$, což přesně máme

$\int_{\varphi_4} \to 0$: jmenovatel je na okolí počátku omezený, čitatel dá ε^{a-1} a přepočet diferenciálu dá ε^1 $\left(z=\varepsilon e^{it} \Rightarrow dz = \varepsilon i e^{it}dt\right) \Rightarrow \left|\int_{\varphi_4}\right| \le \varepsilon^a\cdot$ omezená fce $\to 0$

Rezidua: $\mathrm{Res}_{-1} f = \frac{(-1)^{a-1}}{1\cdot 2} = \frac{e^{i\pi(a-1)}}{2}$ $\qquad \mathrm{Res}_{-2} f = \frac{(-2)^{a-1}}{-1\cdot 1} = -2^{a-1}\cdot e^{i\pi(a-1)}$

$\mathrm{Res}_{-3} f = \frac{(-3)^{a-1}}{-2\cdot(-1)} = \frac{3^{a-1}}{2}\cdot e^{i\pi(a-1)}$ $\qquad e^{i\pi(a-1)} = -e^{i\pi a}$

$\Rightarrow I\left(1-e^{2\pi i a}\right) = 2\pi i\cdot e^{i\pi a}\cdot\left(-\frac{1}{2}+2^{a-1}-\frac{3^{a-1}}{2}\right) = 2\pi i\, e^{i\pi a}\cdot\left(\frac{-3+3\cdot 2^a-3^a}{6}\right)$

$$I = \left(\frac{-3+3\cdot 2^a-3^a}{6}\right)\cdot\pi\cdot\frac{2i}{e^{-\pi i a}-e^{\pi i a}} = \underline{\underline{\frac{3^a-3\cdot 2^a+3}{6}\cdot\frac{\pi}{\sin \pi a}}}$$

Pozor! Toto projde pouze pro $a\neq 1,2$. Pro $a=1, a=2$ je $LS=0$ a nelze dělit!

Pro $a=1$ a $a=2$ příklad nelze spočítat pomocí práce s fcí komplexní proměnné.
Musíme nasadit naudný rozklad na PZ a spočítat to jako v prvním semestru.

$a=1$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = -1 \quad C = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx - \int_0^\infty \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x+3}dx$$

(jednotlivé $\int$ nekonvergují, představme si horní mez jako R místo ∞)

$$= \left[\ln \frac{\sqrt{(x+1)(x+3)}}{x+2}\right]_0^\infty$$

(tady už to zase projde) $= \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{-\ln \frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$= \underline{\underline{\ln \frac{2\sqrt{3}}{3}}}$

$a=2$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad B = 2, \quad C = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \left[\ln \frac{(x+2)^2}{\sqrt{(x+1)(x+3)^3}}\right]_0^\infty = \ln 1 - \ln \frac{4}{3\sqrt{3}} = \underline{\underline{\ln \frac{3\sqrt{3}}{4}}}$$