Sada příkladů 6/11

# Funkce komplexní proměnné

## Reziduová věta I

**Věta:** Nechť $\Gamma$ je Jordanova křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem k svému vnitřku. Nechť $a_1, a_2, \dots a_k$ jsou body z jejího vnitřku. Je-li $f$ holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots a_k\}$, pak

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

**Věta:** Je-li $z_0$ odstranitelnou singularitou $f$, pak $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.
Je-li $z_0$ pólem $f$, jehož násobnost je menší nebo $k \in N$, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big(\frac{1}{(k-1)!}(z-z_0)^k f(z)\Big).$$

Speciálně, je-li $z_0$ pólem $f$, jehož násobnost je jedna a $g$ je v $z_0$ holomorní, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0}\Big(fg\Big) = g(z_0)\operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Je-li $z_0$ kořenem $f$, jehož násobnost je jedna, a $g$ je v $z_0$ holomorní a nenulové, pak

$$\operatorname{Res}_{z_0}\Big(\frac{g}{f}\Big) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Použitím reziduové věty a pravidel pro počítání s rezidui spočtěte následující integrály: (u křivkových integrálů se předpokládá, že se probíhají v kladném smyslu)

1. $\displaystyle\int_{x^2+y^2=2x} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$
2. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^3\,\mathrm{d}z}{2z^4+1}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2}$

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n}, \qquad a>0, b>0,\ n \in \mathbb{N}$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+10}$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{d}x}{x^2+b^2}, \qquad a \in \mathbb{R},\ b>0$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\sin x\,\mathrm{d}x}{x^4-5x^2+4}$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, \qquad a>0$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \qquad a, b>0$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x-t)}, \qquad a>0,\ t \in \mathbb{R}$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(tx)\,\mathrm{d}x}{1+x^3}, \qquad t \in \mathbb{R}$

# Reziduová věta

$f$ má v $z_0 \in \mathbb{C}^*$ izolovanou singularitu, je-li $f$ holomorfní na prstencovém okolí $z_0$, ale ne v $z_0$.

$\longrightarrow$ odstranitelná singularita, je-li vlastní $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. Např. $\dfrac{z^2-1}{z-1}$ v bodě $z_0 = 1$

$\longrightarrow$ pól, je-li $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Např. $f(z) = \frac{1}{z}$ v bodě $z_0 = 0$

$\longrightarrow$ podstatná singularita, pokud $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje. Např. $f(z) = e^{1/z}$

$z_0$ je $k$-násobný kořen $f$, je-li $f^{(n)}(z_0) = 0$ pro $n = 0, 1, \dots, k-1$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ $\exists g$ holomorfní v $z_0$, $g(z_0) \neq 0$ t.ž. $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ na okolí $z_0$.

$f$ má v $z_0$ $k$-násobný pól $\Leftrightarrow$ $\exists h$ holomorfní v $z_0$, $h(z_0) \neq 0$ t.ž. $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-z_0)^k}$ na prst. okolí $z_0$.

$\Rightarrow$ Laur. řada $f$ začíná výrazem $\dfrac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$

podst. singularita $\Rightarrow$ Laur. řada má hlavní část s $\infty$ mnoha nenulovými členy.

**Reziduová věta**: $\Gamma$ ... kladně orientovaná po částech $C^1$ křivka, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int} \Gamma$.

$f$ holomorfní na $\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ a spojité na $\overline{\Gamma} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$.

Pak
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f$$

**Reziduová věta pro $\infty$**: $f$ holomorfní na $\operatorname{Ext}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$. Pak $\int_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}_\infty f$

---

Výpočet reziduí: $z_0$ je odstr. singularita $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$

$z_0$ je pól násobnosti $\leq k$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim\limits_{z \to z_0} \left( \dfrac{1}{(k-1)!} (z-z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)}$

$z_0$ pól $f$ násobnosti 1, $g$ holomorfní $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f$

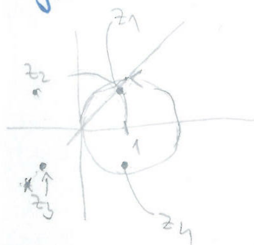
$z_0$ je kořen $f$ násobnosti 1, $g$ holomorfní $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{g(z_0)}{f'(z_0)}$

---

1) $\displaystyle\int_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4+1}$

Kořeny $z^4+1 = 0$: $z = \sqrt[4]{-1} = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3$

Uvnitř $\Gamma$ jsou kořeny $\underset{z_1}{e^{i\pi/4}}$ a $\underset{z_4}{e^{i\frac{7\pi}{4}}}$. $\qquad z^4+1 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$




$$\operatorname{Res}_{z_1} f = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{z^4+1} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(1+i) \cdot \sqrt{2} i} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{i-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{i+1}{(-2)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(i+1)$$

$$\operatorname{Res}_{z_4} f = \lim_{z \to z_4} \frac{z - z_4}{z^4+1} = \frac{1}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)} = \frac{1}{(-\sqrt{2} i)(\sqrt{2} \cdot (1-i)) \cdot \sqrt{2}} = \dots = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{i+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(i-1)$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}}(i+1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(i-1) \right) = 2\pi i \cdot \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \underline{-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}}$$

Ještě dodatek k výpočtu rezidua v $\infty$: ②

- Je-li $|f(z)| \le \frac{C}{|z|^2}$ pro $|z| \ge R$, pak $\operatorname{Res}_\infty f = 0$
- Má-li v $\infty$ $f$ pól násobnosti nejvýše $k$, pak $\operatorname{Res}_\infty f = \lim\limits_{z\to\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)!}\left(z^{k+2} f^{(k+1)}(z)\right)$

---

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3\,dz}{2z^4+1} = I.$ $f(z) = \frac{z^3}{2z^4+1}$ má 4 jednonásobné ~~[illegible]~~ póly v bodech, kde $z^4 = -1/2$,

tj. $z_k = \frac{1}{2^{1/4}} \cdot e^{\pi/4 + k\pi/2}$ $k = 0,1,2,3$. Všechny póly leží uvnitř integrační křivky. Vně $|z|=1$ je $f$ holomorfní

$\to$ první způsob výpočtu: $\operatorname{Res}_{z_k} f = \left(\frac{z^3}{(2z^4+1)'}\right)(z_k) = \frac{z^3}{8z^3}(z_k) = \frac{1}{8}$ pro $k=0,1,2,3$.

Proto $I = 2\pi i \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = \underline{\underline{\pi i}}$

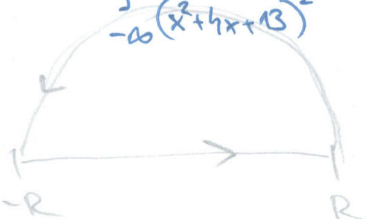
$\to$ druhý způsob výpočtu: $f$ má v $\infty$ odstranitelnou singularitu, protože $\lim\limits_{z\to\infty} f = 0$.

Neplatí však $|f(z)| \le \frac{C}{|z|^2}$, takže $\operatorname{Res}_\infty f$ nemusí být 0. Použijeme vzoreček výše pro $k=0$

$\operatorname{Res}_\infty f = \lim\limits_{z\to\infty} z^2 \cdot \frac{3z^2(2z^4+1) - z^3 \cdot 8z^3}{(2z^4+1)^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Proto $I = -2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\pi i}}$

---

3) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$




Označme $I_R = \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$ a $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$

$J_R := \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z > 0}} f(z)\,dz$. Vidíme, že $f(z) \sim \frac{1}{z^3}$ pro $z \to \infty$

a proto dle Jordanova lemmatu (varianta $\alpha = 0$, $RM_R \to 0$) platí $J_R \to 0$ pro $R \to \infty$

$f(z)$ má ~~[illegible]~~ uvnitř křivky $I_R + J_R$ jeden dvojnásobný pól: $z^2+4z+13 = (z+2)^2 + 9$
$\Rightarrow$ kořeny jmenovatele jsou $-2 \pm 3i$

$\Rightarrow$ pól je v bodě $z_0 = -2+3i$ (ozn. $z_1 = -2-3i$)

proto $I = \lim\limits_{R\to\infty} I_R = \lim\limits_{R\to\infty}(I_R + J_R) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f$ *

Pro dvojnásobné kořeny nemáme přímočarý postup výpočtu, ale máme alespoň vzorec

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} \left((z-z_0)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to z_0} \frac{2(z-z_0)z}{(z-z_1)^2(z-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2 \cdot \left[(z-z_1)^2(z-z_0)^2 - z \cdot 2(z-z_1)(z-z_0)\cdot(2z+4)\right]}{(z-z_1)^4(z-z_0)^4}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{2z(z-z_1) + \left[(z-z_1)(z-z_0) - 4z^2 - 8z\right]}{(z-z_1)^3(z-z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{-z^2 + z\cdot(-2z_1 - 4) + 13}{(z-z_1)^3(z-z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{-z^2 + 6iz + 13}{(z-z_1)^3(z-z_0)}$$

* Čitatel má kořeny $z = \frac{-6i \pm \sqrt{-36+52}}{-2} = 3i \pm 2$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{-(z-(3i+2))}{(z-z_1)^3} = \frac{4}{(6i)^3} = \frac{i}{54}$

$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{i}{54} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{27}}}$

4) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ . $n$-násobné póly v bodech $\pm i$

Využijeme sudosti: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, a tedy $2I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \lim_{R\to\infty} I_R$

Opět $J_R = \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz$, kde $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$. $f(z) \sim \frac{1}{z^{2n}}$ pro $z\to\infty$

a z Jordanova lemmatu tak $\lim_{R\to\infty} J_R = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\alpha=0,\ RM_R\to 0)$

$\Rightarrow 2I = 2\pi i \operatorname{Res}_i f$ , $I = \pi i \operatorname{Res}_i f$

$$\operatorname{Res}_i f = \lim_{z\to i} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1} n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{(2i)^{2n-1}} = \frac{(2n-2)!\cdot(-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot(-1)^n i$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi\,(2n-2)!}{((n-1)!)^2\, 2^{2n-1}}$$

5) DÚ

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} =: I$  Opět $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$, $f(z) \sim \frac{1}{z^6}$ pro $z\to\infty$

$I_R = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$, $I = \lim_{R\to\infty} I_R$  $J_R := \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} f(z)\,dz$, $\lim J_R = 0$ dle Jordanova lemmatu

$\Rightarrow I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{|a|i} f + \operatorname{Res}_{|b|i} f\right)$  $|a|i$ je jednonásobný kořen

$\Rightarrow \operatorname{Res}_{|a|i} f = \frac{1}{(b^2-a^2)^2\cdot 2|a|i}$ . $|b|i$ je dvojnásobný kořen $\Rightarrow \operatorname{Res}_{|b|i} f = \lim_{z\to|b|i} \left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z+|b|i)^2}\right)'$

$$= \lim_{z\to|b|i} \frac{-2z}{(z^2+a^2)^2(z+|b|i)^2} + \frac{-2}{(z^2+a^2)(z+|b|i)^3} = -2\cdot\left(\frac{|b|i}{(a^2-b^2)^2(-4b^2)} + \frac{i}{(a^2-b^2)\,8|b|^3}\right)$$

$$= \frac{+2b^2 i + (b^2-a^2)i}{(a^2-b^2)^2\cdot 4b^2\cdot|b|} = \frac{i\,(3b^2-a^2)}{(a^2-b^2)^2\cdot 4b^2\cdot|b|}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi\cdot\left(\frac{2b^2|b| + |a|(a^2-3b^2)}{(a^2-b^2)^2\cdot 4b^2|a||b|}\right)$$

to platí pro $|a|\neq|b|$, kdy jsou kořeny opravdu různé.

Pro $a=0$ nebo $b=0$ integrál neexistuje kvůli singularitě v nule.

Pro $|a|=|b|$ je $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{a^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)^3}$ $\left| y=\frac{x}{|a|} \quad dy=\frac{dx}{|a|}\right.$ $\Rightarrow I = \frac{|a|}{a^6}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(y^2+1)^3} =$

$$= \text{dle (4)} = \frac{|a|}{a^6}\cdot\pi\cdot\frac{24}{4\cdot 32}\cdot 2 = \frac{3}{8}\pi\frac{|a|}{a^6}$$

7) Jednodušše převedeme na příklad 4)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{a^n}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+\left(\sqrt{\tfrac{b}{a}}x\right)^2\right)^n}=\left|\,y=\sqrt{\tfrac{b}{a}}x,\ dy=\sqrt{\tfrac{b}{a}}dx\,\right|=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^n}=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{1}{a^n}\cdot\frac{\pi\cdot(2n-2)!}{((n-1)!)^2\cdot 2^{2n-2}}$$

8) Nový typ příkladu: $\int f(x)$, kde $f(x)=\sin x\cdot R(x)$ nebo $\cos x\cdot R(x)$ a $R(x)\sim\frac{1}{x}$ pro $x\to\infty$.

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\qquad f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10},\quad I_0:=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

$$I_0=\lim_{R\to\infty}I_R=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx.\qquad J_R:=\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\,z>0}}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}.\qquad z^2-2z+10=(z-1)^2+9$$

Používáme druhou variantu Jordanova lemmatu! $\alpha=1$, stačí nám $M_R\to0$, $M_R=\max_{\langle\Gamma_R\rangle}\frac{z}{z^2-2z+10}$

Vidíme $M_R\sim\frac{1}{R}\to0$. Proto $J_R\to0$

$\Rightarrow I_0=2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_0}f$, kde $z_0$ je jediný pól v horní polorovině, $z_0=1+3i$

$$\mathrm{Res}_{z_0}f=\frac{z_0e^{iz_0}}{z_0-(1-3i)}=\frac{1}{6i}\cdot(1+3i)\cdot e^{i-3}=\frac{1}{6e^3}\cdot(-i)\cdot(1+3i)\cdot(\cos1+i\sin1)$$
$$=\frac{1}{6e^3}\cdot\left[(3\cos1+\sin1)+i\cdot(3\sin1-\cos1)\right]$$

$$\Rightarrow I_0=\frac{\pi}{3e^3}\cdot\left((\cos1-3\sin1)+i(3\cos1+\sin1)\right)$$

$$\Rightarrow I=\mathrm{Re}\,I_0=\frac{\pi}{3e^3}\cdot(\cos1-3\sin1)$$

9) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\mathrm{Im}\,I_0$, kde $I_0$ je z předchozího příkladu

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,I_0=\frac{\pi}{3e^3}\cdot(3\cos1+\sin1)$$

10) $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos ax\,dx}{x^2+b^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax\,dx}{x^2+b^2}$ ze sudosti fce. $f(z):=\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$

$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{R\to\infty}I_R=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx$. $J_R=\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\,z>0}}f(z)dz$. Jordan: $\alpha=a$, $M_R\sim\frac{1}{R^2}$

Projde i $a=0$!! $J_R\to0$

$\Rightarrow I_0=2\pi i\,\mathrm{Res}_{|b|i}f$

$\mathrm{Res}_{|b|i}f=\frac{e^{ia|b|i}}{2|b|i}=\frac{e^{-a|b|}}{2|b|i}$

$$I_0=\frac{\pi e^{-a|b|}}{|b|}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,I_0=\frac{\pi e^{-a|b|}}{2|b|}$$