Sada příkladů 5/11

Funkce komplexní proměnné

Laurentovy řady

Rozviňte následující funkce v Laurentovy řady v redukovaném okolí daného bodu, nebo na dané množině.

1. $f(z) = \frac{1}{z-2}, \;\; z_0 = 0; \; z_0 = \infty$
2. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, \;\; z_0 = 2; \; 1 < |z| < 2$
3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \;\; z_0 = \mathrm{i}; \; z_0 = \infty$
4. $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}, \;\; z_0 = 1$
5. $f(z) = \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}, \;\; 0 < |z| < \infty$
6. $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}, \;\; 0 < |z| < \infty$
7. $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}, \;\; z_0 = \infty$

   Zjistěte, zda je možno rozvinout následující funkce do Laurentovy řady v redukovaném okolí daných bodů. Pokud je funkce mnohoznačná, vyšetřete všechny jednoznačné větve.

8. $f(z) = \cos \frac{1}{z}, \;\; z_0 = 0$
9. $f(z) = \frac{1}{\cos z}, \;\; z_0 = 0$
10. $f(z) = \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}, \;\; z_0 = 0$
11. $f(z) = \sqrt{z}, \;\; z_0 = 0$
12. $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}, \;\; z_0 = 1$
13. $f(z) = \sqrt{1+\sqrt{z}}, \;\; z_0 = 0$

LAURENTOVY ŘADY

f holomorfní v Ω, $z_0 \in \Omega$, $B_R(z_0) \subset \Omega$. Pak $\exists!$ posl. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ t.ž. $\underline{f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z-z_0)^n}$ $\forall z \in B_R(z_0)$. Navíc $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, kde $C_r(z_0)$ je kružnice o poloměru r a středu z_0

Značení: $B_{a,b}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z-z_0| < b\}$ ... otevřené mezikruží s poloměry $a<b$.

<u>Věta</u>: $z_0 \in \mathbb{C}$, f holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak $\exists!$ systém $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ t.ž.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B_{a,b}(z_0)$$

Navíc $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall r \in (a,b)$: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

Část řady tvořená $n = 0, 1, \dots$ = regulární část Laurentovy řady

$n = -1, -2, \dots$ = hlavní část Laurentovy řady

Pro $a = 0$, $b > 0$ definujeme $a_{-1} =: \operatorname{Res}_{z_0} f$ ... reziduum f v bodě z_0

Pro $b = \infty$ definujeme $-a_{-1} =: \operatorname{Res}_{\infty} f$ ... reziduum f v ∞.

---

(1) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, $z_0 = 0$ $\qquad f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n}}$ pro $|z| < 2$

(nepotřebujeme mezikruží, fce je na $|z|<2$ holomorfní)

$z_0 = \infty$: $f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_0^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$ pro $|z| > 2$

$$= \underline{\underline{\sum_0^{\infty} 2^n \cdot z^{-n-1}}}$$

(Laurentova řada v nekonečnu je nejčastěji řada $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ konvergující na vnějšku nějakého kruhu, tj. obsahující jen záporné mocniny ~~z~~ z)

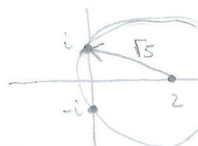
---

(2) $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ $\qquad$ a) $z_0 = 2$ $\qquad$ Rozklad na PZ: $f(z) = \underbrace{\frac{1}{z-2}}_{} + \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i}$

Toto je LŘ v $z_0 = 2$

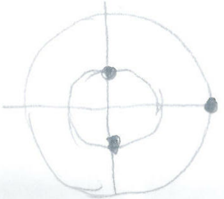
$$\frac{i}{z-i} = \frac{i}{z-2+2-i} = \frac{i}{2-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2-i}} = \frac{i}{2-i} \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{(2-i)^n}$$ pro $\left|\frac{z-2}{2-i}\right| < 1$, tj. $|z-2| < \sqrt{5}$

Podobně $\frac{i}{z+i} = \frac{i}{z-2+2+i} = \frac{i}{2+i} \sum (-1)^n \frac{(z-2)^n}{(2+i)^n}$ pro $|z-2| < \sqrt{5}$



$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot i \left[\frac{1}{(2-i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+i)^{n+1}}\right] (z-2)^n$$ pro $0 < |z-2| < \sqrt{5}$

b) $1<|z|<2$ ... tj. střed $z_0=0$



$|z|<2$: Vyjádříme $\frac{1}{z-2}$ jako v příkladu 1,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$|z|>1$:

$$\frac{i}{z-i} = \frac{i}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{i}{z}\cdot\sum_{0}\left(\frac{i}{z}\right)^n$$

$$\frac{-i}{z+i} = -\frac{i}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{i}{z}\right)} = -\frac{i}{z}\cdot\sum_{0}(-1)^n\frac{i^n}{z^n}$$

součet:

$$\frac{i}{z}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{i}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{z^{2k+1}}\cdot 2 = -\frac{2}{z}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{2k+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} \quad \text{pro } 1<|z|<2$$

(Lze také přímo : $\frac{i}{z-i}-\frac{i}{z+i} = \frac{-2}{z^2+1} = -\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{2}{z^2}\cdot\sum\frac{(-1)^n}{z^{2n}}$)

3 $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ a) $z_0 = i$

Rozklad na PZ: $f(z) = \frac{A}{(z+i)^2} + \frac{B}{(z-i)^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{z-i}$, ... $\Rightarrow A=-\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{i}{4}, D=-\frac{i}{4}$

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{z-i}}_{\text{Toto je OK, jsou to celé mocniny } z-i} + \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z+i)^2}$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{2i}\right)} = \frac{1}{2i}\cdot\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n i^n}\cdot(z-i)^n = \frac{1}{2i}\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}\cdot(z-i)^n$$

$$\frac{1}{(z+i)^2} = -\left(\frac{1}{z+i}\right)' = -\frac{1}{2i}\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}\cdot n\cdot(z-i)^{n-1} = -\frac{1}{2i}\sum_{0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot(n+1)(z-i)^n$$

Věta o derivování holomorfních fcí ve tvaru řady

$$\Rightarrow \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{8}\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}(z-i)^n + \frac{1}{8i}\cdot\frac{i}{2}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}\cdot(n+1)(z-i)^n = \frac{1}{8}\sum\frac{i^n}{2^n}\cdot(z-i)^n\cdot\left(\frac{n+3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{16}\sum_{0}^{\infty}\frac{i^n}{2^n}\cdot(z-i)^n\cdot(n+3) \quad \text{pro } 0<|z-i|<2$$

b) $z_0=\infty$: Pro $|z|>1$ máme $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{z^n}$ a podobně $\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\sum_{0}\frac{i^n}{z^n}$

Dále $\frac{1}{(z+i)^2} = -\left(\frac{1}{z+i}\right)' = +\sum_{0}^{\infty}\frac{(-i)^n\cdot(n+1)}{z^{n+2}}$ a podobně $\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{0}^{\infty}\frac{i^n\cdot(n+1)}{z^{n+2}}$

Dohromady

$$f(z) = \frac{i}{4}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{(-i)^n - i^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{4}\sum\frac{(-i)^n+i^n}{z^{n+2}}(n+1)$$

$$= \underbrace{\frac{i}{4}\cdot\left(\frac{1-1}{z}\right)}_{=0} + \frac{i}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-i)^{n+1}-i^{n+1}}{z^{n+2}} - \frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-i)^n+i^n}{z^{n+2}}\cdot(n+1)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}\frac{\left((-i)^n+i^n\right)\cdot n}{z^{n+2}} \quad \text{pro } |z|>1$$

③

4) $f(z) = z^2 \cdot \sin \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$

Víme $\sin w = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pro $w \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\sin \frac{1}{z-1} = \sum_0^\infty (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$ pro $|z-1|>0$

Navíc $z^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$. Proto $f(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{(z-1)^{2n-1}} + \frac{2}{(z-1)^{2n}} + \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \right]$, $|z-1|>0$

5) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, $0 < |z| < \infty$

Víme $e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$ a $e^{1/z} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$ pro $|z|>0$. Obě konvergují absolutně

a můžeme je násobit člen po členu, tj. $f(z) = \left(\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_0^\infty \frac{1}{n!\, z^n}\right)$

$$\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z\,1!} + \frac{1}{z^2\,2!} + \frac{1}{z^3\,3!} + \dots\right)$$

z^0: $1 \cdot 1 + \frac{1}{1!\,1!} + \frac{1}{2!\,2!} + \dots$ $\Rightarrow$ $\sum_0^\infty \frac{1}{(k!)^2}$

z^1: $1 \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,3!} + \dots$ $\Rightarrow$ $\sum_0^\infty \frac{1}{(k!)(k+1)!}$

z^{-1}: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,3!} + \dots$ totéž! $\sum_0^\infty \frac{1}{k!\,(k+1)!}$ Pozorování: koeficient u z^n a z^{-n} je stejný!

z^p: $1 \cdot \frac{1}{p!} + \frac{1}{1!\,(p+1)!} + \frac{1}{2!\,(p+2)!} + \dots$ $\Rightarrow$ $\sum_0^\infty \frac{1}{k!\,(k+p)!}$

$\Rightarrow$ Celkem $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(k+|n|)!}$ pro $|z| \in (0, \infty)$

6) $f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$ na $0 < |z| < \infty$

$\sin z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\sin \frac{1}{z} = \sum (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\, z^{2n+1}}$. Pronásobíme

$$\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \dots\right)$$

z^0: $1 \cdot 1 - \frac{1}{3!} \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{5!} - \dots$ $\Rightarrow$ $\sum_0^\infty \frac{1}{((2k+1)!)^2}$ liché mocniny nejsou!!

z^2: $-\frac{1}{3!} \cdot 1 + \frac{1}{5!} \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right) - \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{5!} \dots$ $\Rightarrow$ $-\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)!\,(2k+3)!}$

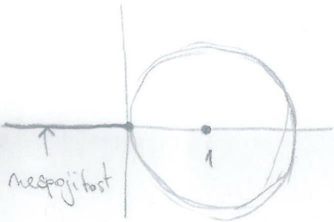
z^{-2}: totéž!! opět koeficienty u z^n a z^{-n} stejné!!

z^{2p}: $1 \cdot \frac{1}{(2p+1)!} + \frac{1}{3!\,(2p+3)!} + \dots$ $\Rightarrow$ $(-1)^p \cdot \sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)!\,(2k+2p+1)!}$

$\Rightarrow$ Celkem $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,(2k+2|n|+1)!}$ pro $0 < |z| < \infty$

Zpět k předchozí sadě

14a) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$. Poloměr konvergence nutně $R=1$



Standardní rozvoj: $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ pro $|z|<1$

tj: $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$ pro $|z-1|<1$

b) $f(z) = \ln^2(1-z)$, $z_0 = 0$. Opět poloměr konvergence očividně $R=1$.

$$\ln(1-z) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-z)^n}{n} = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\ln^2(1-z) = \left(\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) \cdot \left(\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)$$

$$\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right) \cdot \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots\right)$$

1. člen : z^2, koeficient $1 \cdot 1 = 1$

z^3 : $1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1$

z^4 : $1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1$

$\vdots$

z^p : $1 \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-2} + \dots + \frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{p-1} \cdot 1$

$$\Rightarrow \ln^2(1-z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$$

pro $|z|<1$

---

7) $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$, $z_0 = \infty$

$$f(z) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{z-b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{b-a}{z-b}\right)^n$$

pro $|b-a| < |z-b|$

tedy vnější kružnice se středem v b a poloměrem $|b-a|$

Jedná se tedy o Laurentovu řadu v nekonečnu!

---

8) $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

$\left.\begin{array}{l} \cos w \text{ je holomorfní všude} \\ \frac{1}{z} \text{ je holomorfní všude mimo } z=0 \end{array}\right\}$ $\cos \frac{1}{z}$ je holomorfní všude mimo $z=0$

$\Rightarrow$ lze rozvinout na red. okolí $z_0 = 0$.

---

9) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, $z_0 = 0$: Musíme zajistit $\cos z \neq 0$. Tedy $e^{iz} + e^{-iz} \neq 0$

$e^{iz} \neq -\frac{1}{e^{iz}}$ ... $e^{2iz} \neq -1 = e^{i\pi + 2k\pi i}$

$2iz \neq i(\pi + 2k\pi)$

$z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Na okolí $z_0 = 0$ jsou nejblíže body $\pm \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ V kruhu $|z| < \frac{\pi}{2}$ je $f(z)$ holomorfní $\Rightarrow$ lze rozvinout do L.Ř.

---

10) $f(z) = \frac{z^2}{\sin \frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$. Problémy nastanou, když $\sin \frac{1}{z} = 0$. Tedy $e^{i/z} - e^{-i/z} = 0$

$e^{2i/z} = 1 = e^{2k\pi i}$

$\Rightarrow \frac{1}{z} = k\pi$

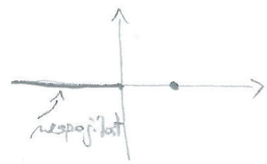
Tedy $f(z)$ není definovaná v bodech $z = \frac{1}{k\pi}$, které se kumulují u $z_0 = 0$

$\Rightarrow$ Neex. redukované okolí $z_0 = 0$, kde by $f(z)$ byla definovaná a šla tak rozvinout v L.Ř.

11) $f(z) = \sqrt{z}$, $z_0 = 0$

$\sqrt{z}$ má dvě větve, jedna pro kterou je $\sqrt{1} = 1$ a druhá $\sqrt{1} = -1$
Obě dvě větve jsou však nespojité na jakémkoli redukovaném okolí $z_0 = 0$, protože vždy z nuly vychází polopřímka nespojitosti. Protože f není spojitá, nemůže být holomorfní a proto neex. rozvoj do L.Ř.

12) $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$, $z_0 = 1$



- Vnitřní větev $\sqrt{1} = 1$ zvolím polopřímku nespojitosti na $\{t \le 0 ; t \in \mathbb{R}\}$

  $\Rightarrow$ $\sqrt{z}$ je holomorfní na okolí $z_0 = 1$ o poloměru 1

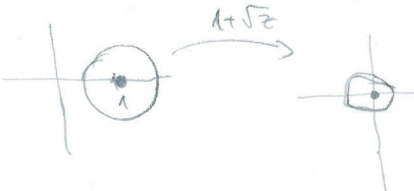
Navíc se na okolí např. o poloměru $\frac{1}{2}$ nikdy ani nepřiblíží hodnotě -1, aby výraz $1 + \sqrt{z}$ začal být problematický.

$\sqrt{z}$ odmocňuje vzdálenosti a půlí úhly

Vezmeme-li libovolnou ze dvou větví vnější odmocniny, výraz $1 + \sqrt{z}$ bude daleko od polopřímky nespojitosti a bude tak existovat red. okolí $z_0 = 1$ (i plné okolí), na kterém lze $f(z)$ rozvinout do L.Ř.

- Vnitřní větev $\sqrt{1} = -1$. Tj. pro $z = r \cdot e^{i\varphi}$ bude $\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}$, $|z-1| < 1$

$z \mapsto 1 + \sqrt{z}$ tak s touto větví zobrazí lib. red. okolí bodu $z_0 = 1$ na množinu, která bude obsahovat red. okolí nuly.



Tam ale vždy bude procházet polopřímka nespojitosti, ať už vezmeme libovolnou větev vnější odmocniny

$\Rightarrow$ Pro tuto větev vnitřní odmocniny nelze rozvést f do L.Ř.

13) $f(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$, $z_0 = 0$

Vnitřní odmocnina má problém na red. okolí $z_0 = 0$, viz 11) $\sqrt{z}$ je tam nespojitá, takže bez ohledu na vnější odmocninu máme problém, který nelze zachránit, $f(z)$ je nespojitá na lib. okolí $z_0 = 0$ $\Rightarrow$ nelze rozvést do L.Ř.