Sada příkladů 3/11

Funkce komplexní proměnné

Křivkový integrál

Spočtěte následující křivkové integrály:

1. $\displaystyle\int_\varphi z\,\mathrm{d}z$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1, 0)$ do $(-1, 0)$ přes horní polorovinu.

2. $\displaystyle\int_\varphi (z-a)^n\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z - a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.

3. $\displaystyle\int_\varphi |z|\,\mathrm{d}z$, φ je průvodič bodu $2 - \mathrm{i}$.

4. $\displaystyle\int_\varphi \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2.

5. Jakých hodnot může nabývat $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9}$, je-li φ uzavřená křivka, která neprochází body $\pm 3\mathrm{i}$.

6. Vypočtěte $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$, je-li φ kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
   a) 1 b) 0 c) -1

7. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$, je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
   a) -1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$

8. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+a^2}$, je-li φ: $2a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Cauchyova věta

1. Vypočtěte integrál $I = \int_\varphi |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

2. Vypočtěte $I = \int_C \frac{z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+4}$. kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2\mathrm{i}$ a poloměru 2.

3. Spočtěte
   a) $\int_{|z+\mathrm{i}|=3} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$
   b) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$.

4. Spočtěte $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2.

5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \to 0$ když $z \to \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_\infty^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{\mathrm{i}\alpha-\infty}^{\mathrm{i}\alpha+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α.

6. Dokažte:
   Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z-a| \le r_0$, $0 \le \arg(z-a) \le b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \le 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, potom $\lim_{r\to 0+} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}Ab$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$, vyťatý úhlem $0 \le \arg(z-a) \le b$.

7. Spočtěte (použijte předchozí příklad)
   a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
   b) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

CAUCHYOVA VĚTA

(Už jsme ji v zásadě používali posledně)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, f holomorfní v Ω. Pak pro každou po částech C^1, uzavřenou křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$

K počítání se občas bude hodit

Jordanovo lemma : $R_0 > 0$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\overline{\Omega}$.

Definujme $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ a $M_R = \max_{\langle\Gamma_R\rangle} |f|$

Dále mějte buď i) $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$ nebo

ii) $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$

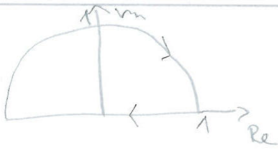
Pak $\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\,dz \to 0$ pro $R \to \infty$. Analogicky pro $\operatorname{Im} z < 0$ a $t \in [\pi, 2\pi]$ a integrály $\int f(z) e^{-i\alpha z}$

Cauchyův vzorec : Γ kladně orientovaná Jordanova, po částech C^1 křivka v $\mathbb{C}$. f holomorfní v $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Pak $\forall z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad a \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz$$

---

1) $I = \int_\varphi |z| \bar{z}\,dz$,



$\varphi_1(t) = e^{it}$, $t \in (\pi, 0)$

$\varphi_1'(t) = ie^{it}$

$$\int_{\varphi_1} |z|\bar{z}\,dz = \int_\pi^0 1 e^{-it} i e^{it}\,dt = -\pi i$$

$\varphi_2(t) = t$, $t \in (1, 0)$

$\varphi_2'(t) = 1$

$$\int_{\varphi_2} |z|\bar{z}\,dz = \int_1^0 t^2\,dt = -\frac{1}{3}$$

$\varphi_3(t) = t$, $t \in (0, -1)$

$\varphi_3'(t) = 1$

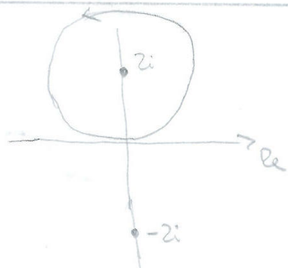
$$\int_{\varphi_3} |z|\bar{z}\,dz = \int_0^{-1} -t \cdot t\,dt = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$I = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} = \underline{\underline{-\pi i}}$$

---

2) $I = \int_C \frac{z e^z}{z^2 + 4}\,dz$

$C = \varphi$, $\varphi(t) = 2i + 2e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$



$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{A}{z - 2i} + \frac{B}{z + 2i} \quad , \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$I = \underbrace{\int_C \frac{1}{2} \frac{e^z}{z - 2i}}_{\vdots} + \underbrace{\int_C \frac{1}{2} \frac{e^z}{z + 2i}}_{\text{holomorfní uvnitř } C \Rightarrow \int_C = 0\,!}$$

Cauchyův vzorec : $e^{2i} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2i}\,dz \Rightarrow I = \pi i e^{2i} = -\pi \sin 2 + \pi i \cos 2$

---

3) a) $\int_\varphi \frac{\sin z\,dz}{z + i} = I$ $\quad \varphi(t) = -i + 3e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$ $\quad -i$ je uvnitř $\varphi \Rightarrow$ Cauchyův vzorec

$$I = 2\pi i \sin(-i) = -2\pi i \sin(i) = \underline{2\pi \sinh 1}$$

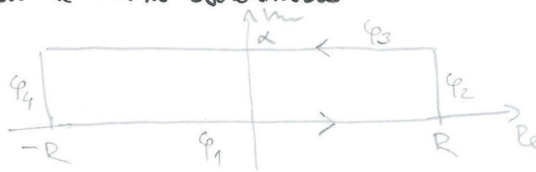
b) $\int_\varphi \frac{e^z}{z^2-1}\,dz = I \qquad \varphi = 2e^{it} \qquad t\in(0,2\pi)$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} - \frac{B}{z-1} \qquad A=B=-1/2$$

$$I = \int_\varphi \frac12 \frac{e^z}{z-1}\,dz - \int_\varphi \frac12 \frac{e^z}{z+1}\,dz = \pi i e - \pi i e^{-1} = \underline{2\pi i \sinh 1}$$

4) viz příklad 7b) z předchozí série $I = -\frac{\pi}{2}$ (pozor na znaménko v zadání)

5) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$. Uvažujme křivku ve tvaru obdélníku



Pak $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{\varphi_1} f(z)\,dz$

$$\int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -\int_{i\alpha-R}^{i\alpha+R} f(x)\,dx$$

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \int_0^\alpha f(R+ti)\,i\,dt \quad \text{a} \quad \int_{\varphi_4} f(z)\,dz = -\int_0^\alpha f(-R+ti)\,i\,dt$$

$\left|\int_{\varphi_2} f(z)\,dz\right| \le \int_0^\alpha |f(R+ti)|\,dt \to 0$ pro $R\to\infty$ dle předpokladu $f(z)\to 0$ pro $z\to\infty$

Totéž pro $\int_{\varphi_4}$. Cauchy: $\int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0$

$$\Rightarrow \int_{\varphi_1} = -\int_{\varphi_3} \underbrace{- \int_{\varphi_2} - \int_{\varphi_4}}_{\xrightarrow{R\to\infty} 0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_1} = -\lim_{R\to\infty}\int_{\varphi_3} = \lim \int_{i\alpha-R}^{i\alpha+R} f(x)\,dx = \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(x)\,dx$$

6) Toto budeme dále označovat jako "lemma o obkružování pólu násobnosti 1".

$$\int_{C_r} f(z)\,dz = \int_0^b f(a+re^{it})\,ire^{it}\,dt$$

viz níže

$$\lim_{r\to0_+}\int_{C_r} f(z)\,dz = \lim_{r\to0_+}\int_0^b f(a+re^{it})\,i\,re^{it}\,dt \overset{?}{=} i\int_0^b \lim_{r\to0_+} f(a+re^{it})\,re^{it}\,dt$$

$f(a+re^{it})\,re^{it} = f(z)(z-a)$ pro $z = a+re^{it}$

Z existence limity $f(z)(z-a)$ plyne existence limity $\lim_{r\to0_+} f(a+re^{it})re^{it}$ a rovnost těchto limit.

Proto $\lim_{r\to0_+}\int_{C_r} f(z)\,dz = i\int_0^b A\,dt = iAb$

Prohození limity a integrálu:

$g_r(t) := f(a+re^{it})\,re^{it}$ $\qquad f$ spojitá $\Rightarrow g_r$ spojitá $\Rightarrow g_r$ měřitelná

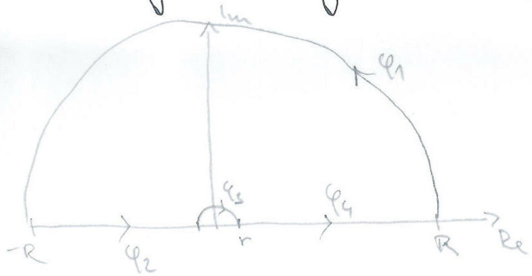
$\lim_{r\to \cancel{\infty}\, 0_+} g_r(t) = A \quad \forall t\in(0,b) \Rightarrow |g_r(t)| \le 2A$ pro $r\le \tilde r_0$

$\tilde r_0$ dost. malé $\Rightarrow$ Máme majorantu $\Rightarrow$ Lebesgueova věta.

7) a) $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ Použijeme $\sin x = \mathrm{Im}\, e^{ix}$

a $I = \mathrm{Im} \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx$

Uvažujme následující uzavřenou křivku a fci $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$



$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} + \int_{\varphi_3} + \int_{\varphi_4} = 0$ z holomorfnosti

$\int_{\varphi_1} f(z)\,dz$: Jordanovo lemma : $\alpha = 1$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z}$, $M_R \to 0$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_1} f(z)\,dz = 0$

Dále z lichosti fcí $\sin x$ a x platí $\mathrm{Im} \int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \mathrm{Im} \int_{\varphi_4} f(z)\,dz$

$\int_{\varphi_3} \frac{e^{iz}}{z}\,dz =$

Použijeme 6) : $a = 0, b = \pi$, $\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = 1$

$\Rightarrow \lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -i\pi$ (− protože obíháme v opačném směru)

Zlimitíme $r \to 0_+$ a $R \to +\infty$, vezmeme Im z výsledku a dostaneme

$$2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \pi = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

---

b) $I = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ Stejná křivka jako výše, opět je součet $= 0$ z holomorfnosti

$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{e^{iz}}{z^2} = g(z) - h(z)$ $g(z) = \frac{1}{z^2}$ $h(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}$

φ_1: $\int_{\varphi_1} g(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{2it}} \cdot Rie^{it} = \frac{i}{R}\int_0^\pi e^{-it}\,dt \longrightarrow 0$ pro $R \to \infty$

$\int_{\varphi_4} h(z)\,dz$: Použijeme Jordanovo lemma, $\alpha = 1$, $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}$, $M_R \to 0$

$\Big\} \lim_{R\to 0} \int_{\varphi_1} f(z)\,dz = 0$

$\varphi_2 + \varphi_4$: $\mathrm{Re} \int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \mathrm{Re} \int_{\varphi_4} f(z)\,dz$ ze sudosti fce $\frac{1-\cos x}{x^2}$

φ_3: Použijeme 6) $a = 0$, $b = \pi$, $\lim_{z\to 0} \frac{1-e^{iz}}{z^2} \cdot z = \lim_{z\to 0} \frac{1-e^{iz}}{z} = -i$

$\Rightarrow \lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -i\pi \cdot (-i) = -\pi$

Zlimitíme $r \to 0_+$, $R \to +\infty$, vezmeme Re z výsledku a dostaneme $2\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx - \pi = 0$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Sada příkladů 4/11

Funkce komplexní proměnné

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\ln(-1)$ b) $\ln \mathrm{i}$ c) $\ln(-2+3\mathrm{i})$.

2. Najděte všechny hodnoty následujících funkcí:
   a) $1^{\sqrt{2}}$ b) 2^{i} c) $(3+4\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$.

   Počáteční hodnota $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ je pro $z = 2$ rovna 0. Bod z proběhne kružnici se středem v počátku a poloměru 2 v kladném směru, $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ závisí spojitě na z. S jakou hodnotou se vrátí $\arg f(z)$ resp. $\operatorname{Im} f(z)$ zpět do bodu $z = 2$?

3. $f(z) = \sqrt[3]{z-1}$

4. $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

5. $f(z) = 2\ln z$

6. $f(z) = \ln z + \ln(z+1)$

   Spočtěte následující křivkové integrály:

7. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1} = 1$

8. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes horní polorovinu, $\sqrt{1} = -1$

9. $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu (1,0) do $(-1,0)$ přes dolní polorovinu, $\sqrt{1} = 1$

10. $\displaystyle\int_\varphi \ln z \,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln 1 = 0$

11. $\displaystyle\int_\varphi \ln z \,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = 1$, $\ln \mathrm{i} = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$

12. $\displaystyle\int_\varphi \ln z \,\mathrm{d}z$, φ je kružnice $|z| = R$, $\ln 1 = 2\pi \mathrm{i}$

13. Vypočtěte
    a) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \cos x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} \sin x \,\mathrm{d}x$
    v Newtonově smyslu, je-li $0 < s < 1$.

14. Následující funkce rozložte v okolí příslušného bodu do mocninné řady a určete poloměr konvergence
    a) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$ b) $f(z) = \ln^2(1 - z)$, $z_0 = 0$

Komplexní logaritmus, obecná mocnina

Přirozené zavedení: Pro $z = re^{i\varphi}$ je $\ln z = \ln r + i\varphi$

Problém: toto je víceznačná fce, protože φ není určeno jednoznačně!

Řešení: omezit φ na interval délky 2π, např. $(-\pi, \pi)$ nebo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ atp.

Pro kladná reálná x je pak $\ln x$ standardní logaritmus, může však být i $\ln x + 2k\pi i$ pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$.

Obecná mocnina: $z^w := e^{w \log z}$, závisí tedy na větvi logaritmu.

Větve $\ln z$ jsou spojité na oblastech bez příslušných polopřímek (např. pro $(-\pi, \pi)$ je to $\mathbb{C} \setminus \{t; t \leq 0\}$)

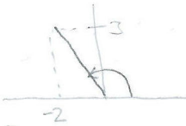
Dokonce jsou holomorfní a platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$. Je potřeba dávat pozor při přechodu polopřímek nespojitosti. Obecně neplatí $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, jen

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i$$

---

1) a) $\ln(-1) = \ln(e^{i\pi}) = i\pi + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

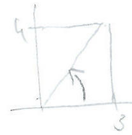
b) $\ln(i) = \ln(e^{i\pi/2}) = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$



c) $\ln(-2+3i) = \ln(\sqrt{13}\, e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}\ln 13 + i(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi) \quad , k \in \mathbb{Z}$

---

2) a) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 1} = e^{\sqrt{2}\cdot\ln(e^{i0})} = e^{\sqrt{2}(2k\pi i)} = \cos(\sqrt{2}\cdot 2k\pi) + i\sin(\sqrt{2}\, 2k\pi) \quad , k \in \mathbb{Z}$



b) $2^i = e^{i\ln 2} = e^{i\cdot\ln(2e^{i0})} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi}\cdot(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2) \quad , k \in \mathbb{Z}$

c) $(3+4i)^{1+i} = \exp[(1+i)\ln(3+4i)] = \exp[(1+i)\cdot(\ln 5 + i\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi i)]$

$= 5\cdot e^{-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}\cdot e^{-2k\pi}\cdot[\sin(\ln 5 + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i\cos(\ln 5 + \operatorname{arctg}\frac{4}{3})] \quad , k \in \mathbb{Z}$

---

3) $f(z) = (z-1)^{1/3} = \exp[\frac{1}{3}\ln(z-1)] = \exp[\frac{1}{3}\ln|z-1|]\cdot e^{i\frac{1}{3}\operatorname{Arg}(z-1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{Arg}(z-1) = \operatorname{Arg} f(z) \qquad z = 2e^{it}, \ t \in (0, 2\pi) \qquad \operatorname{Arg}(2e^{it}-1)$ bychom asi byli schopni vyjádřit jako fci od t, ale nebude to potřeba. Stačí si uvědomit, že je-li $\operatorname{Arg}(2e^{i0}-1) = 0$, pak pro $t \to 2\pi-$ bude $\operatorname{Arg}(2e^{it}-1) \to 2\pi$ a proto $\operatorname{Arg} f(z) \to \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$

Známe-li $\operatorname{Arg} f(z)$, pak $\operatorname{Im} f(z) = e^{|f(z)|}\cdot\cos\operatorname{Arg} f(z)$

---

4) $f(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} = \exp[\frac{1}{2}\ln\frac{z-1}{z+1}] \Rightarrow$ zajímá nás $\frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}$

Zde už vyjádříme $\left.\frac{z-1}{z+1}\right|_{z=2e^{it}} = \frac{2\cos t - 1 + 2i\sin t}{2\cos t + 1 + 2i\sin t} = \frac{(4\cos^2 t - 1) + 4\sin^2 t + 4i\sin t}{5 + 4\cos t} = \frac{3 + 4i\sin t}{5 + 4\cos t}$

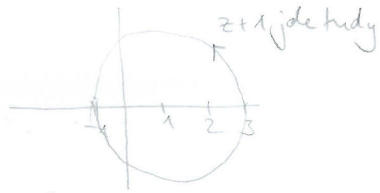
$$= \frac{\sqrt{9+16\sin^2 t}}{5+4\cos t}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{9+16\sin^2 t}} + i\frac{4\sin t}{\sqrt{9+16\sin^2 t}}\right)$$

$\Rightarrow \cos\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1} = \frac{3}{\sqrt{9+16\sin^2 t}}$. $t \in (0, 2\pi) \Rightarrow \cos\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}$ startuje v 1, dojde do $\frac{3}{5}$ $(t = \frac{\pi}{2})$ a vrátí se do 1 $(t = \pi)$, pak ještě jednou $\Rightarrow \operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1}$ se nemůže dostat jinam než do $0 \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{z-1}{z+1} = 0$

5) $f(z) = 2\ln z \quad \big| \, z = 2e^{it} \Rightarrow \tilde{f}(t) = 2\ln(2e^{it}) = 2(\ln 2 + it) = 2\ln 2 + 2it$

t jde od 0 do 2π spojitě $\Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi$ pro $t \to 2\pi$.

6) $f(z) = \ln z + \ln(z+1) \quad \big| \, z = 2e^{it} \Rightarrow \tilde{f}(t) = \ln 2 + it + \ln(1 + 2e^{it})$



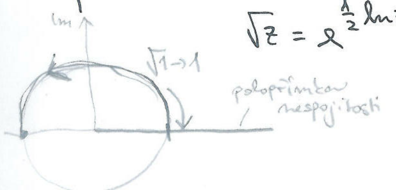
$z+1$ projde za počátkem, tedy taky nakonec dá 2π, stejně jako z ($z+3$ by ale např. dalo nulu, protože by prošlo před počátkem)

$\Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi$ pro $t \to 2\pi$

Šlo by zjistit i z vyjádření $\ln(1+2e^{it}) = \ln\sqrt{5+4\cos t} + iA(t)$, kde $\cos A(t) = \dfrac{1+2\cos t}{\sqrt{5+4\cos t}}$, $\sin A(t) = \dfrac{2\sin t}{\sqrt{5+4\cos t}}$

a úvahou, že aby $A(t)$ byla spojitá, musí stejně jako t dojít do 2π.

7) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} \qquad \varphi(t) = e^{it}, \; t \in (0,\pi), \; \sqrt{1} = 1$



$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z} = \cancel{\ldots} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln|z| + i\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z\right)$

V bodě $1 = 1 + 0i$ Chceme $\sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow \exp\left(i\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) = 1$

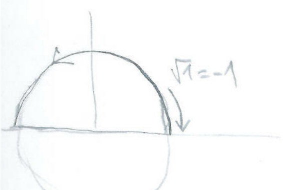
$\Rightarrow \dfrac{\operatorname{Arg} z}{2} = 0 + 2k\pi$

Zvolíme např. $k = 0$.

$\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2}$ tak startuje z nuly pro $t = 0$ a skončí v $\frac{\pi}{2}$ pro $t = \pi$.

$$\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it/2}} = i\int_0^\pi e^{it/2}\,dt = i\cdot\frac{2}{i}\left[e^{i\frac{t}{2}}\right]_0^\pi = 2\cdot\left(e^{i\pi/2} - e^0\right) = 2\cdot(i-1)$$

8) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}}, \; \varphi(t) = e^{it}, \; t \in (0,\pi), \; \sqrt{1} = -1$



Opět $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg} z\right)$ Chceme $\sqrt{1} = -1$

tj. $\exp\left(i\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2}\right) = -1$

$\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2} = \pi + 2k\pi$

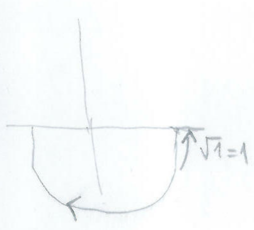
$\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2}$ tak startuje z hodnoty π pro $t = 0$

a skončí v hodnotě $\frac{3}{2}\pi$ pro $t = \pi$

Proto $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{it}\,dt}{e^{i(\pi + \frac{t}{2})}} = \frac{i}{e^{i\pi}}\int_0^\pi e^{i\frac{t}{2}}\,dt = -i\,\frac{2}{i}\left[e^{i\frac{t}{2}}\right]_0^\pi = \underline{-2\cdot(i-1)}$

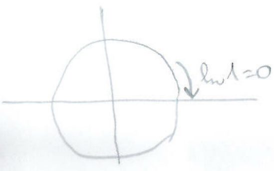
9) $\displaystyle\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}}, \; \varphi(t) = e^{it}, \; t \in (2\pi, \pi), \; \sqrt{1} = 1$. Stejně jako dříve $\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2} = 0 + 2k\pi$

$\dfrac{\operatorname{Arg} z}{2}$ startuje z hodnoty 0 pro $t = 2\pi$, proto $\sqrt{z} = e^{i(\pi + \frac{t}{2})}$, aby $t = 2\pi$ dalo $e^{i\cdot 2\pi} = 1$



$$\int_\varphi \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{2\pi}^\pi \frac{ie^{it}\,dt}{e^{i(\pi + t/2)}} = -i\int_{2\pi}^\pi e^{it/2}\,dt = i\int_\pi^{2\pi} e^{it/2}\,dt = 2\left[e^{i\frac{t}{2}}\right]_\pi^{2\pi} = 2\cdot(-1-i)$$

10) $\int_\varphi \ln z$ $\quad \varphi(t) = e^{it}$, $t \in (0, 2\pi)$, $\ln 1 = 0$

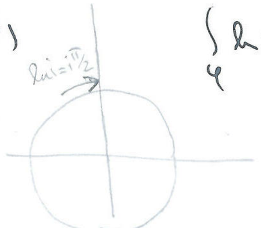


$\ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$. Chceme $\ln 1 = 0$, proto $\operatorname{Arg} z = 0$ pro $t = 0$.

Proto $\int_\varphi \ln z = \int_0^{2\pi} it \cdot ie^{it}\,dt = -\int_0^{2\pi} te^{it}\,dt = -\left(\left[t \cdot \frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt\right)$

$= -\frac{2\pi}{i} + \frac{1}{i} \cdot \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = \underline{2\pi i}$

11) $\int_\varphi \ln z$. Zvolený bod k určení větve logaritmu nás vede k parametrizaci



$t \in (\pi/2, 5/2\pi)$, $\varphi(t) = e^{it}$

$\ln z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, $\ln i = i\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{Arg} z = \pi/2$ pro $t = \pi/2$ OK.

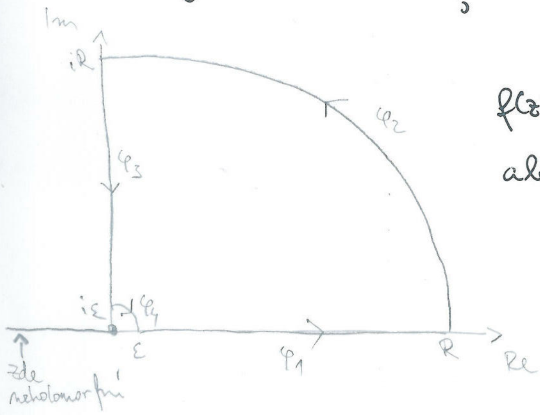
$\int_\varphi \ln z = \int_{\pi/2}^{5/2\pi} it \cdot ie^{it}\,dt = -\int_{\pi/2}^{5/2\pi} te^{it}\,dt$

$= -\left(\left[\frac{t}{i}e^{it}\right]_{\pi/2}^{5/2\pi} - \frac{1}{i}\int_{\pi/2}^{5/2\pi} e^{it}\,dt\right) = -\frac{5\pi}{2i} \cdot i + \frac{\pi}{2i} \cdot i + \frac{1}{i}\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_{\pi/2}^{5/2\pi} = \underline{-2\pi}$

12) DÚ

13) $\int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx \qquad \int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx \qquad s \in (0,1)$

Pro oboji spočítáme $\int_0^\infty x^{s-1}e^{ix}\,dx$ jako $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^R x^{s-1}e^{ix}\,dx$



$f(z) = z^{s-1}e^{iz}$ $\qquad z^{s-1}$ je holomorfní mimo polopřímku $t \leq 0$

ale naše oblast je mimo $\Rightarrow$ Cauchyho věta, $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$

$\int_{\varphi_1}$ chceme

$\int_{\varphi_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi/2} (e^{it})^{s-1} \cdot R^{s-1} \cdot e^{i(Re^{it})} \cdot iRe^{it}\,dt$

$= R^s i \int_0^{\pi/2} (e^{it})^s e^{i(Re^{it})}\,dt = R^s i \int_0^{\pi/2} e^{i(st + R\cos t + iR\sin t)}\,dt$

$= R^s i \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t} \cdot e^{i(st + R\cos t)}\,dt$

Pozorování: $\left|e^{i(st + R\cos t)}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_{\varphi_2} f(z)\,dz\right| \leq R^s \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}\,dt \leq R^s \int_0^{\pi/2} e^{-R \cdot \frac{2t}{\pi}}\,dt = \frac{\pi R^{s-1}}{2}\left(1 - e^{-R}\right)$

$\longrightarrow 0$ pro $R \to +\infty$ protože $s < 1$!

$\int_{\varphi_3} f(z)\,dz = \int_R^\varepsilon i^{s-1} t^{s-1} e^{-t}\,i\,dt = -i^s \int_\varepsilon^R t^{s-1}e^{-t}\,dt = -e^{s \cdot \ln i} \int_\varepsilon^R t^{s-1}e^{-t}\,dt \qquad \ln i = i\frac{\pi}{2}$

$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\varphi_3} f(z)\,dz = -e^{i\frac{\pi}{2}s} \cdot \Gamma(s)$, protože $\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt =: \Gamma(s)$

$\int_{\varphi_4} f(z)\,dz$ dle Tvrzení z příkladu 6 z předchozí série.

$$\lim_{z\to 0} f(z)\cdot z = \lim_{z\to 0} z^s \cdot e^{iz} = 0 \qquad z^s \to 0,\ e^{iz} \text{ omezená}$$

$$\Rightarrow A = 0,\ b = \pi/2 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varphi_4} f(z)\,dz = -iAb = 0$$

... opačný směr probíhání

Celkem tedy $\int_0^\infty z^{s-1} e^{iz}\,dz = e^{i\frac{\pi}{2}s}\cdot\Gamma(s)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{2}s}\Gamma(s)\right) = \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)$$

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{2}s}\Gamma(s)\right) = \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\Gamma(s)$$

---

14) Příště