Sada příkladů 2/11

Funkce komplexní proměnné

Elementární funkce

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\cos(2+\mathrm{i})$ b) $\sin(2\mathrm{i})$ c) $\operatorname{tg}(2-\mathrm{i})$.

2. Dokažte, že pro z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

3. Dokažte, že pro z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
   a) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
   b) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
   c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   d) $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z$
   e) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$.

4. Nalezněte řešení rovnic:
   a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2\mathrm{i}$

5. Najděte součet $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta)$.

6. Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + \mathrm{i}v$, $z = x + \mathrm{i}y$ najděte
   a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
   b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
   c) vzory přímek $u = C$.

7. Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = \mathrm{e}^z$.

8. Najděte obraz $\operatorname{Im} z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.

9. Najděte obraz $|z+1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.

10. Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

11. Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty a, b a c, aby následující funkce byly holomorfní
a) $f(z) = x + ay + \mathrm{i}(bx + cy)$
b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + \mathrm{i} \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + \mathrm{i}y) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle z.

14. Dokažte, že platí
a) $(\sinh z)' = \cosh z$
b) $(\cosh z)' = \sinh z$
c) $(\sin z)' = \cos z$
d) $(\cos z)' = -\sin z$.

15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, je-li
a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y)$
b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
c) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

Komplexní zobrazení, holomorfní funkce

f má v $a\in\mathbb{C}$ derivaci, jestliže existuje $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Nechť $\Omega\subset\mathbb{C}$, $a\in\Omega$. f je holomorfní v a, jestliže ex. okolí a t.ž. f tam má derivaci
je otevřená množina
f je holomorfní v Ω, jestliže f má derivaci všude v Ω

Př: z^k je holomorfní $\forall k\in\mathbb{N}$ na $\mathbb{C}$, $\frac{1}{z}$ je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\bar{z}$ není holomorfní nikde!

Věta (Cauchy-Riemannovy podmínky) Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ má v $a=a_1+ia_2\in\mathbb{C}$ derivaci.

Označme $f(z)=u(z_1,z_2)+iv(z_1,z_2)$ pro $z=z_1+iz_2$, kde $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

a $\mathbb{F}(z_1,z_2):=(u(z_1,z_2),v(z_1,z_2))$, tedy $\mathbb{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Pak

a) Funkce u, v v bodě $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ splňují $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (C.-R. p.)

b) $\mathbb{F}$ má v bodě (a_1,a_2) tot. diferenciál a $J_{\mathbb{F}}(a_1,a_2)=|f'(a)|^2$

Věta (Druhá věta o C.-R. p.): Nechť $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ a u, v jsou jako výše, nechť jsou definovány na okolí $(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$. Jestliže u, v mají v (a_1,a_2) totální diferenciál a splňují v něm C.-R. p., pak f má v $a=a_1+ia_2$ derivaci a platí $f'(a)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(a_1,a_2)-i\dfrac{\partial u}{\partial y}(a_1,a_2)$

---

5) $\beta=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\beta)=n\cdot\cos\alpha$

$\beta\neq 2k\pi$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\beta)=\mathrm{Re}\sum_{0}^{n}e^{i(\alpha+k\beta)}=\mathrm{Re}\,e^{i\alpha}\sum_{0}^{n}e^{ik\beta}=\mathrm{Re}\,e^{i\alpha}\,\frac{e^{i(n+1)\beta}-1}{e^{i\beta}-1}$

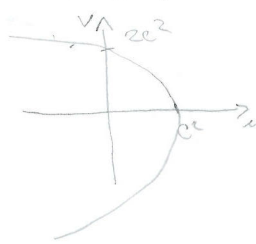
$$=\mathrm{Re}\,e^{i\alpha}\,\frac{e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta}\cdot\sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)}{e^{i\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}=\mathrm{Re}\,e^{i(\alpha+\frac{n}{2}\beta)}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos(\alpha+\frac{n}{2}\beta)\sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

---

6) $z=x+iy$, $w=z^2=(x^2-y^2)+i(2xy)=u+iv$, tj. $u(x,y)=x^2-y^2$
$v(x,y)=2xy$

a) $x=C$: $u=C^2-y^2$
$v=2Cy$ ... Je-li $C=0$, pak $v=0$, $u=-y^2$, tj. odraz je záporná reálná poloosa $u\leq 0$.

... Je-li $C\neq 0$, pak $y=\dfrac{v}{2C}\Rightarrow u=C^2-\dfrac{v^2}{4C^2}$ ... parabola



b) $|z|=R$, tj. $x^2+y^2=R^2$: $u=x^2-y^2=R^2-2y^2$

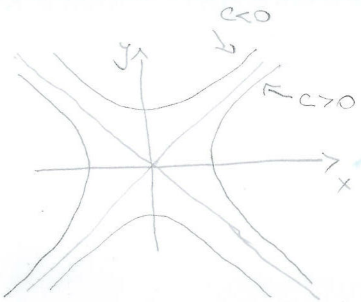
$v=2xy=2y\cdot\sqrt{R^2-y^2}\Rightarrow 4y^2\cdot(R^2-y^2)=v^2\Rightarrow y^2=\dfrac{R^2}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{R^4-v^2}$

$\Rightarrow u=R^2-2y^2=\mp\sqrt{R^4-v^2}\Rightarrow u^2+v^2=R^4$ ... odraz je kružnice o poloměru R^2.

c) $u = C$, v je libovolné

$x^2 - y^2 = C$ .... $C = 0$: dvojice přímek $y = \pm x$

$C \neq 0$: hyperboly



7) $w = e^z$ $\quad z = x + iy \Rightarrow w = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

$u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad v(x,y) = e^x \sin y$

$x = C$: $\left.\begin{array}{l} u = e^C \cos y \\ v = e^C \sin y \end{array}\right\} u^2 + v^2 = e^{2C}$ ... kružnice o poloměru e^C

$y = C$: $\left.\begin{array}{l} u = e^x \cos C \\ v = e^x \sin C \end{array}\right\}$

$C = 0 \Rightarrow$ kladná reálná poloosa $u > 0, v = 0$

$C = \pi/2 \Rightarrow$ kladná imaginární poloosa $u = 0, v > 0$

$C = \pi \Rightarrow$ záporná reálná poloosa $u < 0, v = 0$

$C = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow$ záporná imaginární poloosa $u = 0, v < 0$

$C \neq k\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^x = \frac{u}{\cos C} \Rightarrow v = u \cdot \operatorname{tg} C$ ... polopřímky startující z počátku

vše je 2π - periodické

8) $w = \frac{z-1}{z+1}$ $\quad z = x + iy$ $\quad w = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2}$

$y = 1$: $w = \frac{x^2+2i}{x^2+2x+2}$ $\quad u = \frac{x^2}{x^2+2x+2}$, $v = \frac{2}{x^2+2x+2} \Rightarrow x^2+2x+2 = \frac{2}{v}$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{v}-1} - 1$

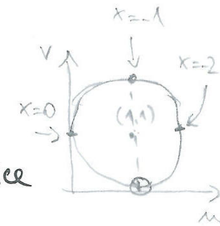
$u = x^2 \cdot \frac{v}{2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{v} \mp 2\sqrt{\frac{2}{v}-1}$

$\Rightarrow u = \frac{v}{2} \cdot \left(\frac{2}{v} \mp 2\sqrt{\frac{2}{v}-1}\right)$

$= 1 \mp \sqrt{v} \cdot \sqrt{2-v} \Rightarrow (u-1)^2 = v \cdot (2-v) = 2v - v^2$

$\Rightarrow (u-1)^2 + (v-1)^2 = 1$ ... kružnice



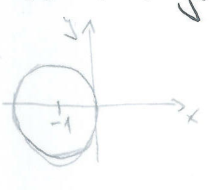
Technicky vzato mimo bod 1, který se "nabývá" jen jako limita $x \to \pm\infty$

9) $w = \frac{1}{z}$ $\quad z = x + iy$ $\quad w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $\quad u = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$|z+1| = 1$ je $(x+1)^2 + y^2 = 1$

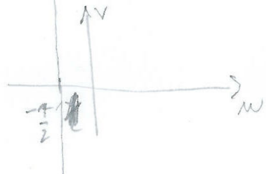
$x^2 + 2x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = -2x$ $\quad \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$ $\quad v = \frac{y}{2x} = \frac{\pm\sqrt{-2x-x^2}}{2x}$

$= \pm\sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2x}}$



kde $x \in [-2, 0]$ dle obrázku. $\left.\begin{array}{l} x = -2 : v = 0 \\ x = -1 : v = \pm\frac{1}{2} \\ x \to 0_- : v \to \pm\infty \end{array}\right\}$ v nabývá lib. hodnot na celém $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ obraz dané kružnice je přímka $-\frac{1}{2} + ti$, $t \in \mathbb{R}$



10) $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ $\quad z=x+iy$ $\quad w=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$

$$=\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}+i\,\frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}$$

$|z|=2$: $x^2+y^2=4$: $u=\frac{5x}{4}$ $\quad v=\frac{3}{4}y$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{4}{5}x\right)^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=4$

$$\frac{4}{25}x^2+\frac{4}{9}y^2=1$$

$\left(\frac{2}{5}x\right)^2+\left(\frac{2}{3}y\right)^2=1$ ... elipsa

11) Ne!! $\quad u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ Nesplňuje nikde C.-R.p.!
$v(x,y)=0$

Obecně, pokud je funkce komplexní proměnné reálná (její im. část je $\equiv 0$), pak musí být konstantní, pokud má být holomorfní. $|z|$ není konstantní na žádné otev. množině v $\mathbb{C}$.

12) a) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$, tj. $z=x+iy$ $\quad u(x,y)=x+ay$
$v(x,y)=bx+cy$

C.-R.p.: $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y}=c$ $\Rightarrow$ $\underline{c=1}$!
$\frac{\partial v}{\partial x}=b$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y}=a$ $\Rightarrow$ $\underline{b=-a}$ $\Big\}$ Nutná podmínka

Postačující podmínka: C.-R.p. + existence tot. dif. $u(x,y)$ a $v(x,y)$. To jsou lineární fce
$\Rightarrow$ ex. tot. dif. všude, tj. $c=1$, $b=-a$ jsou nutné i postačující podmínky

b) $f(z)=\cos x(\cosh y+a\sinh y)+i\sin x(\cosh y+b\sinh y)$ $\quad u(x,y)=\cos x(\cosh y+a\sinh y)$
$v(x,y)=\sin x(\cosh y+b\sinh y)$

C.-R.p.: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x(\cosh y+a\sinh y)$
$\frac{\partial v}{\partial y}=\sin x(\sinh y+b\cosh y)$ $\Big\}$ $a=-1$, $b=-1$

$\frac{\partial v}{\partial x}=\cos x(\cosh y+b\sinh y)$
$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos x(\sinh y+a\cosh y)$ $\Big\}$ $a=-1$, $b=-1$

Nutná podmínka, která je i postačující, protože tot. dif. fcí u,v existují všude

13) $f(x+iy)=\sqrt{|xy|}$, tj. $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$
$v(x,y)=0$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=0$
$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=0$ $\Big\}$ C.-R.p. splněny

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h_1h_2|}}{h_1+ih_2}$ .... $h_1=0,\ h_2\to 0$: $\lim_{h_2\to 0} 0=0$

$h_1=h_2$: $\lim_{h_1\to 0}\frac{|h_1|}{h_1(1+i)}=\frac{1}{1+i}\underbrace{\lim_{h_1\to 0}\frac{|h_1|}{h_1}}_{\text{nemá limitu}}$

$\Rightarrow f'(0)$ neex.

14) Funkce e^z, sin/cos, sinh/cosh jsou zavedeny jako součty řad stejně jako jejich reálné protějšky. Tyto řady mají poloměr konvergence $R=\infty$ a podle věty o holomorfnosti součtu řady též definují holomorfní fce, které tedy lze derivovat člen po členu. Proto

$$(e^z)' = \left(\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{0}^\infty \frac{n\cdot z^{n-1}}{n!} = \sum_1^\infty \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Vztahy pro sin/cos a sinh/cosh lze odvodit buď analogicky skrz řady nebo pomocí derivace exponenciály:

$$(\sinh z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = \cosh z$$

$$(\cosh z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \sinh z$$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \cos z$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z$$

---

15) a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x(x\cos y - y\sin y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x(\cos y \cancel{}) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\,dy = 2xy + \overset{e^x(x+1)\sin y}{\cancel{}} - e^x \overbrace{\int y\sin y\,dy}^{-y\cos y + \sin y} + C_1(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + \cancel{} + \cancel{} - e^x\sin y + C_1(x)$$

$$+e^x((x+1)\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - e^x(\sin y + y\cos y) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\cdot(1+x)$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int 2y + e^x(\sin y + y\cos y)\,dx = 2xy + e^x\sin y + e^x y\cos y + C_2(y) + \sin y \overbrace{\int xe^x\,dx}^{xe^x - e^x}$$

$(\cdot(1+x))$

$$= 2xy + e^x\left[y\cos y + x\sin y\right] + C_2(y)$$

Porovnáním obou výsledků vidíme, že se nic neztratilo, a proto $C_1(x) = C_2(y) = C$ a

$$v(x,y) = 2xy + e^x(y\cos y + x\sin y) + C, \quad z\in\mathbb{C}, \quad C\in\mathbb{R}$$

Spojením u+iv a zjednodušením najdeme f(z) = z^2 + ze^z + Ci

b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + 5y + 2x\int \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = 2xy + 5y + x\int \frac{1}{(t+x^2)^2}\,dt = 2xy + 5y - \frac{x}{y^2+x^2} + C_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + x + \int \frac{dx}{x^2+y^2} - 2y^2\int \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx = 2xy + x + \frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2y^2\left[\frac{x}{2y^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2y^2}\int\frac{dx}{x^2+y^2}\right]$$

$$= 2xy - x - \frac{x}{y^2+x^2} + C_2(y)$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x, \quad C_2(y) = 5y \quad \text{a} \quad v(x,y) = 2xy - x + 5y - \frac{x}{y^2+x^2} + C, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, \ C\in\mathbb{R}$$

c) DÚ

Spojením u+iv a zjednodušením najdeme f(z) = z^2+(5-i)z -i/z + Ci

Sada příkladů 3/11

Funkce komplexní proměnné

Křivkový integrál

Spočtěte následující křivkové integrály:

1. $\displaystyle\int_\varphi z\,\mathrm{d}z$, φ je polokružnice $|z| = 1$, z bodu $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu.

2. $\displaystyle\int_\varphi (z-a)^n\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$.

3. $\displaystyle\int_\varphi |z|\,\mathrm{d}z$, φ je průvodič bodu $2-\mathrm{i}$.

4. $\displaystyle\int_\varphi \frac{z}{\bar{z}}\,\mathrm{d}z$, φ je kladně orientovaný obvod horního mezikruží se středem v počátku a poloměry 1 a 2.

5. Jakých hodnot může nabývat $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9}$, je-li φ uzavřená křivka, která neprochází body $\pm 3\mathrm{i}$.

6. Vypočtěte $\displaystyle\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$, je-li φ kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu
   a) 1 b) 0 c) -1

7. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(z-1)^3}$, je-li φ kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu
   a) -1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$

8. Vypočtěte $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+a^2}$, je-li φ: $2a\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$.

Cauchyova věta

1. Vypočtěte integrál $I = \int_\varphi |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$, kde φ je záporně orientovaný obvod jednotkového polokruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

2. Vypočtěte $I = \int_C \frac{z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z^2+4}$. kde C je kladně proběhnutá kružnice o středu $2\mathrm{i}$ a poloměru 2.

3. Spočtěte
   a) $\int_{|z+\mathrm{i}|=3} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$
   b) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$.

4. Spočtěte $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$, je-li C kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{3}{2}$ a středu 2.

5. Nechť funkce $f(z)$ je regulární v pásu $-a < \operatorname{Im} z < a$ a vyhovuje podmínce $f(z) \to 0$ když $z \to \infty$, $-a < \operatorname{Im} z < a$. Dokažte, že když $\int_\infty^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak pro každé $\alpha \in (-a, a)$ integrál $\int_{\mathrm{i}\alpha-\infty}^{\mathrm{i}\alpha+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ také konverguje a jeho hodnota nezávisí na α.

6. Dokažte:
   Je-li f spojitá v oblasti $0 < |z-a| \le r_0$, $0 \le \arg(z-a) \le b$, kde $r_0 > 0$, $0 < b \le 2\pi$ a existuje-li vlastní limita $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A$, potom $\lim_{r\to 0+} \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}Ab$, kde C_r je kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$, vyťatý úhlem $0 \le \arg(z-a) \le b$.

7. Spočtěte (použijte předchozí příklad)
   a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
   b) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL V $\mathbb{C}$

Křivka: zobrazení φ z $[a,b] \to \mathbb{C}$, regulární, je-li $\varphi'(t) \neq 0$ na $[a,b]$

Jednoduchá křivka: φ je prostá na $[a,b)$ a na $(a,b]$ a φ^{-1} spojitá na obrazu (a,b)

Uzavřená křivka: $\varphi(a) = \varphi(b)$

Jordanova křivka: jednoduchá + uzavřená

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, pak $\int_\varphi f(z)\,dz := \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, jestliže PS existuje jako Lebesgueův integrál

$l_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$ ... délka křivky

Vnímáme-li $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}^2$, je f vektorová fce a $\int_\varphi f(z)\,dz$ je vlastně křivkový integrál 2. druhu.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f, F jsou definované na Ω. Je-li $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$, pak F je primitivní fcí k f na Ω.

<u>Věta</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ otev., f spojitá na Ω. PNTJE:
(i) f má v Ω primitivní fci
(ii) $\forall \varphi$ uzavřenou, po částech C^1: $\int_\varphi f(z)\,dz = 0$ $(\langle\varphi\rangle \subset \Omega)$
(iii) Křivkový integrál z f nezávisí na cestě v Ω.

<u>Věta</u>: $\Omega \subset \mathbb{C}$ otev., f spojitá a F primitivní k f. Pak $\forall \varphi: [a,b] \to \Omega$ (po částech C^1): $\int_\varphi f(z)\,dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

---

1) $\int_\varphi z\,dz$, φ: půlkružnice $|z|=1$ z $(1,0)$ do $(-1,0)$ přes horní polorovinu

$f(z) = z$ má primitivní fci $F(z) = \frac{z^2}{2}$ všude v $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \int_\varphi z\,dz = F(1) - F(-1) = \underline{\underline{0}}$

Ověříme i z definice: $\varphi: [0,\pi] \to \mathbb{C}$: $\varphi(t) = e^{it}$, $\varphi'(t) = ie^{it}$

$$\int_\varphi z\,dz = \int_0^\pi e^{it}\, i e^{it}\,dt = i\int_0^\pi e^{2it}\,dt = \frac{i}{2i}\left[e^{2it}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

---

2) $\int_\varphi (z-a)^n\,dz$, φ: kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $n \in \mathbb{Z}$

• $n \geq 0$: f má primitivní fci $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int_\varphi (z-a)^n\,dz = 0$

(z definice: $\varphi: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$: $\varphi(t) = Re^{it} + a$

$$\int_\varphi (z-a)^n\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n\, iRe^{it}\,dt = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = iR^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \underline{0}$$

• $n < 0$: analogicky jako výše: $\int_\varphi (z-a)^n\,dz = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt$ ... $n = -1$: $\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \Rightarrow \int_\varphi (z-a)^n\,dz = \underline{\underline{2\pi i}}$

$n \neq -1$: $iR^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$, protože $e^{2\pi i(n+1)} = 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$

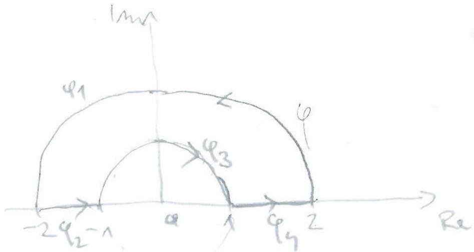
3) $\int_\varphi |z|\,dz$, φ je průvodič bodu $2-i$

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}: \quad \varphi(t) = (2-i)t$$
$$\varphi'(t) = (2-i)$$

$$|(2-i)t| = \sqrt{5}\,t \quad \Rightarrow \quad \int_\varphi |z|\,dz = \int_0^1 \sqrt{5}\,t\cdot(2-i)\,dt = \sqrt{5}(2-i)\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$$

---

4) V zadání je překlep, má být "polomezikruží", tj. viz obrázek



φ má 4 kusy.

$$\varphi_1(t) = 2e^{it} \text{ pro } t\in(0,\pi) \qquad \varphi_1' = 2ie^{it}$$
$$\varphi_2(t) = -2+t \text{ pro } t\in(0,1) \qquad \varphi_2' = 1$$
$$\varphi_3(t) = -e^{-it} \text{ pro } t\in(0,\pi) \qquad \varphi_3' = ie^{-it}$$
$$\varphi_4(t) = 1+t \text{ pro } t\in(0,1) \qquad \varphi_4' = 1$$

$$\int_{\varphi_1} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^\pi \frac{2e^{it}}{2e^{-it}}\,2ie^{it}\,dt = 2i\int_0^\pi e^{3it}\,dt = \frac{2}{3}\left[e^{3it}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\cdot(-1-1) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{\varphi_2} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^1 \frac{-2+t}{-2+t}\cdot 1\,dt = 1$$

$$\int_{\varphi_3} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^\pi \frac{-e^{-it}}{-e^{it}}\,ie^{-it}\,dt = i\int_0^\pi e^{-3it}\,dt = \frac{i}{-3i}\left[e^{-3it}\right]_0^\pi = -\frac{1}{3}(-1-1) = \frac{2}{3}$$

$$\int_{\varphi_4} \frac{z}{\bar z}\,dz = \int_0^1 \frac{1+t}{1+t}\cdot 1\,dt = 1$$

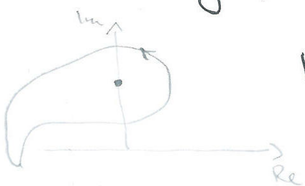
$$\int_\varphi \frac{z}{\bar z}\,dz = -\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+2 = \frac{4}{3}$$

---

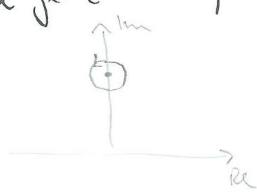
5) $\int_\varphi \frac{dz}{z^2+9} = -\frac{1}{6i}\int_\varphi \frac{dz}{z+3i} + \frac{1}{6i}\int_\varphi \frac{dz}{z-3i}$ $\qquad \frac{1}{z\pm 3i}$ jsou holomorfní na každé oblasti, která neobsahuje body $\pm 3i$

a) φ je taková, že $\pm 3i$ obě leží vně křivky φ: $\int_\varphi \frac{dz}{z^2+9} = 0$ z holomorfnosti

b) $3i$ je uvnitř, $-3i$ je vně:



Integrál přes libovolnou křivku je z holomorfnosti roven integrálu přes kružnici



$$\varphi(t) = 3i + \varepsilon e^{it} \qquad t\in[0,2\pi]$$
$$\varphi'(t) = i\varepsilon e^{it} \quad \Rightarrow \quad \int_\varphi \frac{dz}{z-3i} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}}\cdot i\varepsilon e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{6i}\int_\varphi \frac{dz}{z-3i} = -\frac{\pi}{3}$$

Křivka může bod $3i$ oběhnout několikrát, i v opačném směru $\Rightarrow$ možné hodnoty jsou $k\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

c) $-3i$ uvnitř, $3i$ vně: analogicky, opět možné hodnoty $k\frac{\pi}{3}$

d) obě uvnitř opět naintegrujeme pouze celé násobky $\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ Možné hodnoty jsou $k\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

6) $\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = \int_\varphi \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1}\,dz$ | zakrývací metodou $A=-1$, $B=C=\frac{1}{2}$

$$= \int_\varphi -\frac{1}{z}\,dz + \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z+1}$$

a) $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$. Z holomorfnosti vypadnou první a třetí integrál

$\varphi'(t) = \frac{1}{2} i e^{it}$

$$\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{it}}\cdot \frac{1}{2} i e^{it}\,dt = \pi i$$

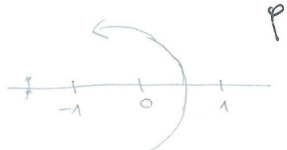
(podle směru obíhání bude $\pm\pi i$)

b) Vypadnou ~~první a~~ třetí a druhý integrál a stejným výpočtem $\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\int_\varphi \frac{1}{z}\,dz = -2\pi i$

(dle směru $\pm 2\pi i$)

c) Vypadne první a druhý integrál. $\int_\varphi \frac{dz}{z(z^2-1)} = \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{dz}{z+1} = \pi i$ (dle směru $\pm\pi i$)

7) $I = \int_\varphi \frac{1}{2\pi i}\frac{e^z\,dz}{z(z-1)^3} = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi -\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z-1} - \frac{e^z}{(z-1)^2} + \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz$

a) 

Z holomorfnosti vypadnou poslední tři integrály

$$I = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z}\,dz$$

Nejjednodušší je zde využít Cauchyův vzorec: f holomorfní uvnitř křivky φ (kladně orientované), $z_0 \in \operatorname{Int}\varphi$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$\text{a } f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$$

Použijeme pro $z=0$: $-e^0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z}\,dz$, tj. $\underline{I = -1}$

b) Vypadne první integrál. $I = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z-1}\,dz}_{A} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{(z-1)^3}\,dz}_{C}$

Cauchyův vzorec pro $z_0 = 1$: $A = e^1$, $B = e^1$, $C = \frac{e^1}{2}$

$$I = e^1 - e^1 + \frac{e^1}{2} = \underline{\underline{\frac{e}{2}}}$$

c) Nevypadne žádný integrál, spočítáme stejně $\underline{I = -1 + \frac{e}{2}}$

8) $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^z}{z^2+a^2} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2ia}\left(\int_\varphi \frac{e^z}{z-ia}\,dz - \int_\varphi \frac{e^z\,dz}{z+ia}\right)$ φ je kružnice o poloměru $2a$, středu v počátku, kladně orientovaná $\Rightarrow$ obkrouží oba body $\pm ia$. Dle Cauchyova vzorce je pak

$$I = \frac{1}{2ia}\left(e^{ia} - e^{-ia}\right) = \frac{\sin a}{a}$$