Sada příkladů 1/11

Fourierovy řady

Trigonometrické řady

1. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x+\pi) = -f(x)$?

3. Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?

4. Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu a vyšetřete její konvergenci
   a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$ b) $f(x) = ax$ na $(-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ na $(0, \pi)$
   c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$
   e) e^{ax} na $(-1, 1)$ f) $\ln|\sin \frac{x}{2}|$ na intervalu periody

5. Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2.

Sčítání trigonometrických řad

6. Sečtěte následující řady v uvedených intervalech
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $[0, 2\pi]$
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $(-\pi, \pi)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $[-\pi, \pi]$

7. Spočtěte
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Aplikace na řešení některých PDR

Pomocí trigonometrických řad řešte následující úlohy

8.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)$$
$$u(0,x) = x(l-x) \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_t(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]$$
$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

9.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)$$
$$u(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_t(0,x) = \cosh x \quad \text{na } [0,l]$$
$$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

10.
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)$$
$$u(0,x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{na } [0,l]$$
$$u(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).$$

11.
$$\Delta u = 0 \text{ na } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1 < x^2+y^2 < 4\}$$
$$u(x,y) = f_1(\varphi) \quad \text{na } x^2+y^2 = 1$$
$$u(x,y) = f_2(\varphi) \quad \text{na } x^2+y^2 = 4,$$

kde f_1 a f_2 jsou 2π periodické spojité funkce, φ označuje úhlovou proměnnou v polárních souřadnicích.

8) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u(0,x) = x(l-x)$ $\quad u(t,0) = u(t,l) = 0$ (1)

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u_t(0,x) = 0$

na $(0,T)\times(0,l)$

Řešení budeme hledat ve tvaru $u(t,x) = T(t)X(x)$. Pak

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \quad \text{, tj.} \quad \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$ Vlevo je fce v proměnné t, vpravo fce v proměnné x a rovnají se $\forall t,x \Rightarrow$ musí být rovny stejné konstantě λ.

- $X''(x) = \lambda X(x)$ s okrajovými podmínkami $X(0) = X(l) = 0$

Je-li $\lambda > 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ a okrajové podmínky splňuje jen $C_1 = C_2 = 0$

Je-li $\lambda = 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 x + C_2$ a —— " —— " —— $C_1 = C_2 = 0$

Je-li $\lambda < 0$, obecné řešení je $X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,x$. $X(0) = 0$ dá $C_1 = 0$

$X(l) = 0$ dá $C_2 \cdot \sin\sqrt{-\lambda}\,l = 0$

Abychom našli nenulové řešení, musí být $\sqrt{-\lambda}\,l = k\cdot\pi$, tedy $\lambda_k = -\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$

Tedy pro $k = 1,2,\dots$ máme $\lambda_k = -\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}$ a řešení $X_k(x) = C_k \sin\dfrac{k\pi x}{l}$.

- $T''(t) = -\dfrac{k^2\pi^2}{l^2}c^2 T(t)$. To je téměř stejná rce jako pro $X(x)$ a máme tak řešení

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi c k t}{l} + B_k \sin\frac{\pi c k t}{l}$$

a konečně $u_k(t,x) = \left(a_k \cos\dfrac{\pi c k t}{l} + b_k \sin\dfrac{\pi c k t}{l}\right)\cdot \sin\dfrac{\pi k x}{l}$, kde $a_k = A_k C_k$, $b_k = B_k C_k$

Toto je řešení pro každé $k \in \mathbb{N}$, rovnice je lineární $\Rightarrow$ součet řešení je také řešení $\Rightarrow$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi c k t}{l} + b_k \sin\frac{\pi c k t}{l}\right)\sin\frac{\pi k x}{l}$$

a_k, b_k určíme z poč. podmínek: $t = 0$: $u(0,x) = x(l-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k x}{l}$

ozn. vzniklou fci $\tilde{f}$

Potřebujeme rozvinout $x(l-x)$ do sinové řady na $(0,l)$ $\Rightarrow$ prodloužíme liše a rozvineme do Fourierovy řady na $(-l,l)$: ozn. vzniklé F. koeficienty jako $\tilde{b}_k$: $\tilde{b}_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}\tilde{f}(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx =$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = 2\int_0^l x\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx - \frac{2}{l}\int_0^l x^2\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = 2\left[x\cdot\left(-\cos\frac{k\pi}{l}x\right)\cdot\frac{l}{k\pi}\right]_0^l + 2\int_0^l \cos\frac{k\pi}{l}x\cdot\frac{l}{k\pi}\,dx$$

$$+ \frac{2}{l}\left[x^2\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x\cdot\frac{l}{k\pi}\right]_0^l - \frac{4}{l}\cdot\frac{l}{k\pi}\int_0^l x\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx = -\frac{2l^2}{k\pi}\cdot(-1)^k + \frac{2l}{k\pi}\cdot\frac{l}{k\pi}\cdot\underbrace{\left[\sin\frac{k\pi}{l}x\right]_0^l}_{=0} + \frac{2l^2}{k\pi}\cdot(-1)^k -$$

$$- \frac{4}{k\pi}\left(\underbrace{\left[x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\frac{l}{k\pi}\right]_0^l}_{=0} - \frac{l}{k\pi}\int_0^l \sin\frac{k\pi}{l}x\,dx\right) = -\frac{4l}{k^2\pi^2}\cdot\frac{l}{k\pi}\cdot\left[\cos\frac{k\pi}{l}x\right]_0^l = -\frac{4l^2}{k^3\pi^3}\cdot\underbrace{\left((-1)^k - 1\right)}_{=0 \text{ pro } k \text{ sudé}}$$

$\Rightarrow a_k = \tilde{b}_k = 0$ pro $k = 2m$ a $a_{2m+1} = \tilde{b}_{2m+1} = \dfrac{8l^2}{(2m+1)^3\pi^3}$

Druhá poč. podmínka: $u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cdot \frac{\pi c k}{l} \sin \frac{\pi c k t}{l} + b_k \frac{\pi c k}{l} \cos \frac{\pi c k t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l}$

$$0 = u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\pi c k}{l} \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \Rightarrow b_k = 0.$$

Hledané řešení je $u(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8 l^2}{(2m+1)^3 \pi^3} \cdot \cos \frac{\pi c (2m+1) t}{l} \sin \frac{\pi (2m+1) x}{l}$

9, DÚ

10, $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad u(0,x) = x e^{-x} \quad u(t,0) = u_x(t,l) = 0$

na $(0,T) \times (0,l)$. Opět hledáme řešení $u(t,x) = T(t)X(x)$

$$\Rightarrow T'(t)X(x) = a^2 X''(x) T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Začátek stejně jako příklad 8, $X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$. $X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

dále ale chceme $X'(l) = 0$. $X'(x) = C_2 \sqrt{-\lambda} \cos\sqrt{-\lambda} x$

$X'(l) = C_2 \sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda} l = 0$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda} l = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k = 0,1,2,\dots \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Rightarrow \lambda_k = -\frac{1}{l^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$

a $X_k(x) = C_k \sin \frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$

Druhá rovnice: $\frac{T_k'(t)}{T_k(t)} = -\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \Rightarrow T_k(t) = A_k \cdot \exp\left(-\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 t\right)$

$\Rightarrow$ Řešení je ve tvaru $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 t\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)$

Poč. podmínka: $x e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)$ na $(0,l)$. Protože jde o vlastní fce, fy tvoří úplný ortogonální systém, přestože technicky vzato nejde o trigonometrický systém s fcemi $\sin \frac{k\pi}{l}x$ kvůli členu $\frac{\pi}{2}$. $\int_0^l \sin^2\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)dx = \frac{l}{2} \Rightarrow a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x e^{-x} \sin\left(\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)dx$

To vyřešíme per partes a po dlouhém počítání dojdeme k výsledku

$$a_k = \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1\right)^2} \cdot \left(\frac{4}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) - e^{-l} \cdot (-1)^k \cdot \left[l\left(\frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2+1\right) - \frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 + 1\right] \cdot \frac{2}{l}\right)$$

Poznámka: počáteční podmínka $x e^{-x}$ v bodě $x = l$ není kompatibilní s okrajovou podmínkou $u_x(l) = 0$.

To nastane jen pro $l = 1$, protože $(x e^{-x})' = (1-x)e^{-x} \big|_{x=l} = (1-l)e^{-l} = 0$ jen pro $l = 1$.

M) $\Delta u = 0$ na $\Omega = \{(x,y) : 1 < x^2+y^2 < 4\}$ $\quad u(x,y) = f_1(\varphi)$ na $x^2+y^2=1$
$u(x,y) = f_2(\varphi)$ na $x^2+y^2=4$

Převod do polárních souřadnic : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

$\Rightarrow$ Řešíme $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ na $r \in (1,2)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$
$u(1,\varphi) = f_1(\varphi)$
$u(2,\varphi) = f_2(\varphi)$
$u(r,0) = u(r,2\pi)$

Zvolíme $u(r,\varphi) = R(r)\,\phi(\varphi)$

Pak $R''(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}\phi''(\varphi)R(r) = 0$

$$\frac{r^2\left(R''(r) + \frac{R'(r)}{r}\right)}{R(r)} = -\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda$$

Hledáme 2π-periodické řešení rovnice $\phi''(\varphi) = -\lambda\phi(\varphi)$. To najdeme jen pro $\lambda > 0$, kdy

$\phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$ $\qquad \phi(0) = C_1 = \phi(2\pi) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi$

To zařídíme volbou $\sqrt{\lambda} = k$, $k = 0,1,2,\dots$ (tj. $\lambda = k^2$)

a $\phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi$, pro $k=0$ pak $\phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2}$

Rovnice pro R: $r^2R''(r) + rR'(r) - k^2R(r) = 0$. To je Eulerova rovnice

$r = e^t$, $Z(t) = R(e^t)$
$Z'(t) = R'(e^t)e^t$
$Z''(t) = R''(e^t)(e^t)^2 + R'(e^t)e^t = R''(r)r^2 + R'(r)r$

$\Rightarrow Z''(t) - k^2 Z(t) = 0 \quad \Rightarrow Z(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$ | pro $k=0$ $Z(t) = C_1 + C_2 t$

$\Rightarrow R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}$ | $R_0(r) = C_1 + C_2 \ln r$

Linearita $\Rightarrow$ Sečteme přes všechna k

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k r^k + d_k r^{-k}\right)\left(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi\right)$$

~~Okrajové podmínky~~ Někdy se hodí jiný zápis: $u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln r + \sum r^k (a_k\cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$
(využíváme kraje $r=1, r=2$) $\qquad + \sum \left(\frac{2}{r}\right)^k (c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi)$

Okr. podm.: $f_1(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k + 2^k c_k)\cos k\varphi + (b_k + 2^k d_k)\sin k\varphi$

$f_2(\varphi) = \frac{a_0}{2} + d_0 \ln 2 + \sum_1^{\infty} (2^k a_k + c_k)\cos k\varphi + (2^k b_k + d_k)\sin k\varphi$

Z této soustavy pak vyřešíme a_k, b_k, c_k, d_k rozvinutím $f_1(\varphi)$ a $f_2(\varphi)$ do Fourierových řad.

Sada příkladů 2/11

Funkce komplexní proměnné

Elementární funkce

1. Najděte reálnou a imaginární část hodnoty následujících funkcí:
   a) $\cos(2 + \mathrm{i})$ b) $\sin(2\mathrm{i})$ c) $\mathrm{tg}\,(2 - \mathrm{i})$.

2. Dokažte, že pro z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

3. Dokažte, že pro z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ platí:
   a) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$
   b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_2 \sin z_1$
   c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   d) $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i} \sinh z$
   e) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$.

4. Nalezněte řešení rovnic:
   a) $\sin z + \cos z = 2$ b) $\sinh z - \cosh z = 2\mathrm{i}$

5. Najděte součet $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$.

6. Při zobrazení $w = z^2$, $w = u + \mathrm{i}v$, $z = x + \mathrm{i}y$ najděte
   a) obrazy přímek $x = C$, $C \in \mathbb{R}$
   b) obrazy kružnic $|z| = R > 0$
   c) vzory přímek $u = C$.

7. Najděte obraz kartézské souřadnicové sítě ($x = C$, $y = C$) při zobrazení $w = \mathrm{e}^z$.

8. Najděte obraz $\mathrm{Im}\, z = 1$ při zobrazení $w = \frac{z-1}{z+1}$.

9. Najděte obraz $|z + 1| = 1$ při zobrazení $w = \frac{1}{z}$.

10. Najděte obraz $|z| = 2$ při zobrazení $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

11. Zjistěte, zda funkce $f(z) = |z|$ je v nějaké oblasti holomorfní.

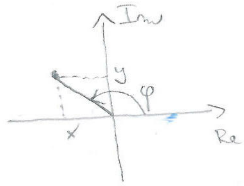
12. Nalezněte nutné a postačující podmínky na reálné konstanty a, b a c, aby následující funkce byly holomorfní
a) $f(z) = x + ay + \mathrm{i}(bx + cy)$
b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + \mathrm{i} \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

13. Ukažte, že reálná funkce $f(x + \mathrm{i}y) = f(z) = \sqrt{|xy|}$ splňuje v počátku Cauchy–Riemannovy podmínky, ale nemá tam derivaci podle z.

14. Dokažte, že platí
a) $(\sinh z)' = \cosh z$
b) $(\cosh z)' = \sinh z$
c) $(\sin z)' = \cos z$
d) $(\cos z)' = -\sin z$.

15. Nalezněte holomorfní funkci (na příslušné oblasti) $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, je-li
a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x(x \cos y - y \sin y)$
b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
c) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

KOMPLEXNÍ ANALÝZA



$z \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$ $\quad x = \mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R}$, $\; y = \mathrm{Im}\, z \in \mathbb{R}$ $\qquad i^2 = -1$

$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $\qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arg z$ volíme tak, aby $\varphi \in (-\pi, \pi]$

(není definováno pro $z = 0$)

$\bar{z} = x - iy$ pro $z = x + iy$

Elementární funkce: $e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y)$ pro $z = x + iy$

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \quad \text{(poloměr konvergence řady je } \infty \text{ !)}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

---

1) a) $\cos(2+i) = \frac{1}{2}\left(e^{2i-1} + e^{-2i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} \cdot (\cos 2 + i \sin 2) + e(\cos 2 - i \sin 2)\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, \cos(2+i) = \frac{\cos 2}{2}\left(e + e^{-1}\right) = \cos 2 \cdot \cosh 1$

$\mathrm{Im}\, \cos(2+i) = \frac{\sin 2}{2}\left(-e + e^{-1}\right) = -\sin 2 \sinh 1$

b) $\sin(2i) = \frac{1}{2i}\left(e^{-2} - e^{2}\right) = \frac{i}{2}\left(e^2 - e^{-2}\right) \Rightarrow \mathrm{Re}\, \sin(2i) = 0$, $\mathrm{Im}\, \sin(2i) = \sinh 2$

c) $$\mathrm{tg}(2-i) = \frac{\sin(2-i)}{\cos(2-i)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{1+2i} - e^{-1-2i}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{1+2i} + e^{-1-2i}\right)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e \cdot (\cos 2 + i \sin 2) - \frac{1}{e}(\cos 2 - i \sin 2)\right)}{\frac{1}{2}\left(e(\cos 2 + i \sin 2) + \frac{1}{e}(\cos 2 - i \sin 2)\right)} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1}{\cos 2 \cosh 1 + i \sin 2 \sinh 1} = \frac{(\sin 2 \cosh 1 - i \cos 2 \sinh 1)(\cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1} =$$

$$= \frac{\sin 2 \cos 2 (\cosh^2 1 - \sinh^2 1) - i \sinh 1 \cosh 1 (\cos^2 2 + \sin^2 2)}{\cos^2 2 \cosh^2 1 + \sin^2 2 \sinh^2 1 + \sin^2 2 \cosh^2 1 - \sin^2 2 \cosh^2 1} \Rightarrow \mathrm{Re}\, \mathrm{tg}(2-i) = \frac{\sin 2 \cos 2}{\cosh^2 1 - \sin^2 2}$$

$$\mathrm{Im}\, \mathrm{tg}(2-i) = \frac{-\sinh 1 \cosh 1}{\cosh^2 1 - \sin^2 2}$$

---

2) Ozn. $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Pak $\exp(z_1 + z_2) = \exp\left((a+c) + i(b+d)\right) = \exp(a+c) \cdot \left(\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right)$

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b) \cdot e^c (\cos d + i \sin d) =$

$= e^{a+c} \cdot \left[\cos b \cos d - \sin b \sin d + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)\right]$

$= \exp(a+c) \cdot \left[\cos(b+d) + i \sin(b+d)\right]$ CBD.

---

3) a) $\sin(z_1 + z_2) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1} \cdot e^{-iz_2}\right)$

$\sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1 = \frac{1}{4i}\left(\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\right) = \frac{1}{4i}\left(2 e^{iz_1} e^{iz_2} - 2 e^{-iz_1} e^{-iz_2}\right)$

CBD.

b) $\cos(z_1+z_2) = \frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4}\left(\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2e^{iz_1}e^{iz_2}+2e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right)$

CBD

---

c) $\sin^2 z + \cos^2 z$: Využijeme b) pro $z_1 = z$, $z_2 = -z$. Pak $LS = e^0 = \cos 0 = 1$

$PS = \cos z \cdot \cos(-z) - \sin z \cdot \sin(-z) = \cos^2 z + \sin^2 z$

ze sudosti $\cos z$ a lichosti $\sin z$, což plyne z definic

---

d) $\sin(iz) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-z} - e^{z}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = i \sinh z$

e) $\cos(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^{z}\right) = \cosh z$

4,a) $\sin z + \cos z = 2$. Hledáme $z = a + ib$

$\sin(a+ib) = \sin a \cos ib + \cos a \sin ib = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$ dle 3 a, d, e

$\cos(a+ib) = \cos a \cos ib - \sin a \sin ib = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$

$\Rightarrow$ LS : $\cosh b \cdot (\sin a + \cos a) + i \sinh b (\cos a - \sin a)$

PS : $2 + i0$

$\Rightarrow$ Soustava rovnic : $\sinh b\, (\cos a - \sin a) = 0$

$\cosh b\, (\sin a + \cos a) = 2$

1. rovnice : 1. možnost $\sinh b = 0 \Rightarrow b = 0$, a libovolné

$\Rightarrow$ 2. rovnice $\sin a + \cos a = 2$. To nemá v $\mathbb{R}$ řešení

2. možnost : $\sin a = \cos a \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b libovolné

$\Rightarrow$ 2. rovnice $\rightarrow$ k sudé : $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = \sqrt{2}$

$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$

$\rightarrow$ k liché : $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \Rightarrow \cosh b = -\sqrt{2}$

nemá řešení

$\Rightarrow z = a + ib$, kde $a = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$b = \pm \operatorname{argcosh} \sqrt{2}$

$\left(\operatorname{argcosh}\sqrt{2} = \ln(\sqrt{2}+1)\right.$ a

$\left.-\operatorname{argcosh}\sqrt{2} = \ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \ln(\sqrt{2}-1)\right)$

---

b) $\sinh z - \cosh z = 2i$ Opět $z = a + ib$

$\frac{1}{i}\sin(-b+ia) - \cos(-b+ia) = -i\left(-\sin b \cos ia + \cos b \sin ia\right) - \left(\cos b \cos ia + \sin b \sin ia\right)$

$= \cos b (\sinh a - \cosh a) + i\, \sin b (\cosh a - \sinh a) \Rightarrow$ $\cos b (\sinh a - \cosh a) = 0$

$\sin b (\sinh a - \cosh a) = -2$

$\Rightarrow \cos b = 0$, tj. $b = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. rovnice: k liché : $\sinh a - \cosh a = 2 \Rightarrow e^{-a} = -2$ nemá řeš.

k sudé : $\sinh a - \cosh a = -2 \Rightarrow e^{-a} = 2 \Rightarrow a = -\ln 2$

$\Rightarrow z = -\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$