Fourierovy řady

Trigonometrické řady

1. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkci $f(x) = x^4$. Vyšetřete konvergenci této řady a řady derivací.

2. Které koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in L^1(-\pi, \pi)$ se anulují, jestliže platí $f(-x) = f(x)$ a $f(x + \pi) = -f(x)$?

3. Jak prodloužíte funkci $f \in L^1(0, \pi/2)$ na interval $(-\pi, \pi)$, aby její Fourierova řada měla tvar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx$?

4. Následující funkce rozložte ve Fourierovu řadu a vyšetřete její konvergenci
   a) $\sin^4 x$ na $(0, \pi)$ b) $f(x) = ax$ na $(-\pi, 0)$, $f(x) = bx$ na $(0, \pi)$
   c) $|\sin x|$ na intervalu délky periody d) $\max(0, x)$ na $(-\pi, \pi)$
   e) e^{ax} na $(-1, 1)$ f) $\ln|\sin \frac{x}{2}|$ na intervalu periody

5. Rozložte do sinové a kosinové řady na $(0, \pi)$ funkci x^2.

Sčítání trigonometrických řad

6. Sečtěte následující řady v uvedených intervalech
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ $[0, 2\pi]$
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ $(-\pi, \pi)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ $[-\pi, \pi]$

7. Spočtěte
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Aplikace na řešení některých PDR

Pomocí trigonometrických řad řešte následující úlohy

8.
$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)\\ u(0,x) = x(l-x) \quad \text{na } [0,l]\\ u_t(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]\\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).\end{gathered}$$

9.
$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)\\ u(0,x) = 0 \quad \text{na } [0,l]\\ u_t(0,x) = \cosh x \quad \text{na } [0,l]\\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).\end{gathered}$$

10.
$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times(0,l)\\ u(0,x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{na } [0,l]\\ u(t,0) = u_x(t,l) = 0 \quad \text{na } [0,T).\end{gathered}$$

11.
$$\begin{gathered}\Delta u = 0 \text{ na } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1 < x^2+y^2 < 4\}\\ u(x,y) = f_1(\varphi) \quad \text{na } x^2+y^2 = 1\\ u(x,y) = f_2(\varphi) \quad \text{na } x^2+y^2 = 4,\end{gathered}$$

kde f_1 a f_2 jsou 2π periodické spojité funkce, φ označuje úhlovou proměnnou v polárních souřadnicích.

TRIGONOMETRICKÉ ŘADY (1)

Uvažujeme ortogonální systém na intervalu $(-\pi,\pi)$: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$

Fourierova řada: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, kde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \, dx \quad k = 0,1,2,\dots \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \, dx \quad k = 1,2,\dots$$

Tento systém je úplný v $L^2(-\pi,\pi)$ a proto $f = \frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$ v $L^2(-\pi,\pi)$ a z Carlesonovy věty platí rovnost i ve smyslu skoro všude na intervalu $(-\pi,\pi)$

Platí : f sudá $\Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$
f lichá $\Rightarrow a_k = 0 \ \forall k$

Fourierovy koeficienty a_k, b_k lze počítat i pro fce v $L^1(-\pi,\pi)$. Platí Riemann-Lebesgueovo lemma: Je-li $f \in L^1(-\pi,\pi)$ a a_k, b_k její F. koeficienty, pak $a_k \to 0$, $b_k \to 0$ když $k \to \infty$.

Věta (o derivaci) : Je-li $m \in \mathbb{N}_0$ t.ž. $\sum_{k=1}^{\infty} k^m (|a_k| + |b_k|) < \infty$, pak trigonometrická řada s koeficienty a_k, b_k konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, součet je 2π-periodická fce třídy C^m a řadu lze až m-krát derivovat člen po členu s tím, že platí rovnosti mezi derivacemi součtu a součty derivací.

Věta (o integraci) : Nechť f je 2π-periodická, po částech spojitá, s F. koeficienty a_k, b_k. Označme $g(x) = \int_0^x f(y)\,dy - \frac{a_0}{2}x$. Pak g je 2π-periodická, spojitá a její F. řada je

$$\frac{A_0}{2} + \sum A_k \cos kx + B_k \sin kx, \text{ kde } A_k = -\frac{b_k}{k} \quad B_k = \frac{a_k}{k} \text{ a } A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

---

(1) $f(x) = x^4$ na $[-\pi,\pi]$. $\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \frac{1}{5\pi}\left(\pi^5 - (-\pi)^5\right) = \frac{2}{5}\pi^4$

f sudá $\Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[x^4 \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{4}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin kx \, dx\right) = -\frac{4}{k\pi}\cdot\left(\left[x^3\cdot\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx\right)$$

$$= \frac{8\pi^2}{k^2}\cdot(-1)^k - \underbrace{\frac{12}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx}_{\text{dále jen toto}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx$$

$$= -\frac{2}{k}\left(\left[x\cdot\frac{(-\cos kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx\right)$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\cdot(-1)^k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{8\pi^2}{k^2}(-1)^k - \frac{48}{k^4}(-1)^k$$

$$\Rightarrow x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2} - 48\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^4}$$

2) $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ je sudá $\Rightarrow b_k = 0$

$f(x+\pi) = -f(x)$: $a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx}$

$$= \int_{-\pi}^{0} -f(x+\pi)\cos kx\,dx = \left| \begin{matrix} y = x+\pi \\ dy = dx \end{matrix} \right.$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(y)\cos(ky - k\pi)\,dy \quad \dots \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(y)\cdot(-1)^k \cos ky\,dy \quad \dots \text{přejmenujeme } y \text{ na } x \text{ a sečteme}$$

$\Rightarrow a_k = \int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\cdot\left(1-(-1)^k\right)dx$ Vidíme $a_k = 0$ pro k sudé, tj. $a_{2m} = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}$, $b_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

3) Stejným postupem jako 2) : cosinová řada $\Rightarrow f$ musí být sudá
liché členy nulové $\Rightarrow$ musí platit $f(x+\pi) = f(x)$, tj. fce je ve skutečnosti π-periodická. Tj. prodloužit sudě na $(-\pi/2, 0)$ a pak periodicky na $(-\pi, -\pi/2)$ a $(\pi/2, \pi)$.

Příklad:

4) a) $\sin^4 x$ na $(0,\pi)$: Trigonometrický systém na $(0,\pi)$ je tvořen $\{1, \cos 2x, \sin 2x, \cos 4x, \sin 4x, \dots\}$

Můžeme integrovat, ale lze také použít jen součtové vzorce:

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

To je trigonometrický polynom, proto musí být tento polynom svou vlastní řadou, všechny ostatní koeficienty jsou nulové.

b) $\left.\begin{matrix} f(x) = ax & \text{na } (-\pi, 0) \\ = bx & \text{na } (0,\pi) \end{matrix}\right\}$ na $(-\pi,\pi)$: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{ax^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{bx^2}{2}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{(b-a)\pi}{2}$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = \frac{1}{\pi}\left(\left[ax\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{a}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \left[bx\frac{\sin kx}{k}\right]_{0}^{\pi} - \frac{b}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right) =$$

$$= \frac{a}{\pi k}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi k}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\cdot(a-b)$$

$\Rightarrow a_{2m} = 0$ a $a_{2m+1} = \frac{2}{\pi(2m+1)^2}\cdot(a-b)$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx = \frac{1}{\pi}\left(-\left[ax\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{a}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos kx\,dx - \left[bx\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{\pi} + \frac{b}{k}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{a}{k}(-1)^k - \frac{b}{k}(-1)^k + \frac{a}{\pi k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{b}{\pi k}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{0}^{\pi} = -\frac{(a+b)(-1)^k}{k}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(b-a)\pi}{4} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(a-b)}{\pi(2m+1)^2}\cos((2m+1)x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a+b)(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

c) $f(x)=|\sin x|$ na intervalu délky periody, tedy na $(0,\pi)$

Viz a), ortog. systém je $\{1, \cos 2x, \sin 2x, \cos 4x, \sin 4x, \dots\}$, proto $\sin x$ není svým vlastním polynomem!!

$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(B-A))$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos 2kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}\right]_0^\pi - \left[\frac{\cos((2k-1)x)}{2k-1}\right]_0^\pi\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right)$$

$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(B-A) - \cos(B+A))$

$$= -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4k^2-1}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin 2kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos((2k-1)x) - \cos((2k+1)x)\,dx = 0, \text{ protože } \sin l\pi = 0 \ \forall l \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sin x = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx \quad \text{na } (0,\pi)$$

d) $f(x) = \max(0,x)$ na $(-\pi,\pi)$, tj. $f=0$ na $(-\pi,0)$
$f=x$ na $(0,\pi)$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2}$ $\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = $ (viz b)) $= \dots$ Vlastně celý příklad je b) pro volbu $a=0, b=1$. Proto

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{m=0}^\infty \frac{-2}{\pi(2m+1)^2}\cos((2m+1)x) + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

e) $f(x) = e^{ax}$ na $(-1,1)$

$$a_0 = \int_{-1}^1 e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}(e^a - e^{-a}) = \frac{2}{a}\sinh a$$

$$a_k = \int_{-1}^1 e^{ax}\cos(k\pi x)\,dx = \frac{1}{k\pi}\left[e^{ax}\sin k\pi x\right]_{-1}^1 - \frac{a}{k\pi}\underbrace{\int_{-1}^1 e^{ax}\sin k\pi x\,dx}_{b_k} = -\frac{a}{k\pi}\left(-\left[e^{ax}\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right]_{-1}^1 + \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{a}{k\pi}e^{ax}\cos k\pi x\,dx}_{=\frac{a}{k\pi}a_k}\right)$$

$$a_k\cdot\left(1+\frac{a^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{a}{k^2\pi^2}\cdot(-1)^k\cdot(e^a - e^{-a}) \Rightarrow a_k = \frac{2(-1)^k a \sinh a}{a^2+k^2\pi^2}$$

z výše uvedeného: $b_k = -\frac{k\pi}{a}a_k = \frac{-2(-1)^k\cdot k\pi\cdot\sinh a}{a^2+k^2\pi^2}$

$$\Rightarrow e^{ax} = \sinh a\cdot\left[\frac{1}{a} + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k[a\cdot\cos(k\pi x) - k\pi\sin(k\pi x)]}{a^2+k^2\pi^2}\right] \quad \text{na } (-1,1)$$

f) DÚ

5) Rozložit f do sinové řady na $(0,\pi)$ = prodloužit f na $(-\pi,\pi)$ tak, ať vznikne lichá fce
 — " — cosinové — " — = — " — sudá fce

$$f(x) = x^2 \text{ do sinové řady} \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{na } (-\pi,0) \\ x^2 & \text{na } (0,\pi)\end{cases} \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 -x^2\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\left[x^2\cdot\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi x\cos kx\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{k}\cdot(-1)^{k+1}\right) + \frac{4}{\pi k}\cdot\left(\left[x\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin kx\,dx\right) = \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} - \frac{4}{\pi k^2}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3}\cdot((-1)^k - 1) \Rightarrow x^2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1}\sin kx - \sum_{m=1}^\infty \frac{8}{\pi}\frac{\sin((2m-1)x)}{(2m-1)^3}$$

$f(x)=x^2$ do cosinové řady $\Rightarrow \tilde{f}(x)=x^2$ na $(-\pi,\pi)$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi k}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right)=\frac{4(-1)^k}{k^2}-\frac{4}{\pi k^2}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi}=\frac{4(-1)^k}{k^2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos kx \quad \text{na } (0,\pi)$$

---

6) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ na $(0,2\pi)$ Využijeme $\cos nx = \operatorname{Re} e^{inx}$

a budeme se věnovat řadě $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ pro $z=e^{ix}$.

Tato řada očividně konverguje pro $|z|<1$, my máme $|z|=1$, ale tam řada konverguje mimo bod $x=0$ (to je totéž co $x=2\pi$) díky Dirichletově kritériu.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$, což už víme z mocninných řad. Zde je ovšem z komplexní číslo a vlastně nevíme, co je $\ln$ z komplexního čísla (zatím!!)

Nyní tedy uvěříme, že pro komplexní číslo $w=|w|e^{i\vartheta}$ zavedeme

$$\ln w = \ln|w| + i\vartheta, \text{ kde } \vartheta\in(-\pi,\pi]$$

a že součet $\sum\frac{z^n}{n}$ je přesně tento logaritmus z výrazu $\frac{1}{1-z}$. To navíc jde jen pro $|z|<1$, pro $|z|=1$ musíme použít Abelovu větu: $\displaystyle\sum\frac{e^{inx}}{n}=\lim_{r\to 1_-}\ln\left(\frac{1}{1-re^{ix}}\right)$

$$=\ln\left(\frac{1}{1-e^{ix}}\right)$$

Potřebujeme vyjádřit $w=\frac{1}{1-e^{ix}}$ jako $|w|e^{i\vartheta}$

Platí $$w=\frac{1-e^{-ix}}{(1-e^{ix})(1-e^{-ix})}=\frac{1-\cos x+i\sin x}{2-e^{ix}-e^{-ix}}=\frac{1-\cos x+i\sin x}{2\cdot(1-\cos x)}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}+i\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

My ale navíc chceme tvar $\cos A + i\sin A$

$\Rightarrow \sin\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$ a $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$

$$\Rightarrow w=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \ln w = \ln\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

a všimneme si, že pro $x\in(0,2\pi)$ je $\sin\frac{x}{2}>0$ a $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\in(-\pi,\pi]$, takže je vše OK

$$\Rightarrow \sum\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$$

a navíc jsme také spočítali $\displaystyle\sum\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ } obojí na $(0,2\pi)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = f(x)$ na $[0,2\pi]$. Očividně $f(0)=f(2\pi)=0$

Dle věty o derivaci a integraci Fourierových řad $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = -\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right)dt.$$ To nemá elementární integrál.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = f(x)$ na $(-\pi,\pi)$

Všimneme si, že v příkladu 4b) jsme počítali mj. $\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = \frac{1}{k}\left[-\cos kx\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^k}{k}$, což je rovné nule pro k sudé a rovné $\frac{2}{k}$ pro k liché. My máme sčítat řadu lichých sinů dělených k, to je přesně to, co vidíme! Hledaná fce f tak bude konstanta na $(0,\pi)$ prodloužená liše na $(-\pi,0)$, aby zmizely cosiny. Tj. $f = A\cdot\operatorname{sgn}x$.

Dopočítáme A: $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A\cdot\operatorname{sgn}x\cdot\sin kx\,dx = \frac{2A}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx = \frac{2A}{\pi}\cdot\frac{2}{k}$ pro k liché

My chceme $b_k = \frac{1}{k}$ pro k liché $\Rightarrow A = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ $\underline{f(x) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x}$

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n} =: f(x)$ na $[-\pi,\pi]$ $\qquad (-1)^n \sin nx = \cos n\pi \sin nx = \sin n(x+\pi)$

$\Rightarrow f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\sin(n(x+\pi))}{n}$ na $[-\pi,\pi]$ $\qquad x+\pi =: y \Rightarrow y\in[0,2\pi]$

$f(y-\pi) = \sum_1^{\infty}\frac{\sin ny}{n}$ na $[0,2\pi]$ $\qquad y=0$ a $y=2\pi$: $f(-\pi)=f(\pi)=0$

a jinde dle a): $f(y-\pi) = \frac{\pi-y}{2} = -\frac{(y-\pi)}{2}$ na $(0,2\pi)$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{x}{2}$ na $(0,2\pi)$, $f(2\pi)=0$

7) a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ Vidíme, že v příkladu 1) jsme dostali ve výsledku mj. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^4}$

Pro $x=\pi$ je to $\sum\frac{1}{k^4}$, což chceme. Tj.

$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum\frac{1}{k^2} - 48\sum\frac{1}{k^4}$. Potřebujeme znát ještě $\sum\frac{1}{k^2}$.

Rovněž v příkladu 1) jsme spočítali $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{4}{k^2}\cdot(-1)^k$ a protože $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$,

platí $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2}$ a odtud $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Dosadíme: $\frac{4}{5}\pi^4 = 8\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6} - 48\sum\frac{1}{k^4} \Rightarrow \sum\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Pozor: Používáme Dirichlet-Jordanovo kritérium: Má-li f konečnou variaci na $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ a je l-periodická, pak v každém bodě $x_0\in(\alpha,\beta)$ platí $F_f(x_0) = \frac{f(x_0+)-f(x_0-)}{2}$.

Tedy je-li f spojitá, pak $f(x_0)$ je součtem své Fourierovy řady vyčíslené v x_0.

Lze také použitím Parsevalovy rovnosti. Ta pro 2π-periodické fce má tvar

$$\|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \frac{a_0^2\pi}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Abychom dostali $\sum \frac{1}{k^4}$ potřebujeme Fourierovy koeficienty $\frac{1}{k^2}$, nabízí se tak řada

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ ~~[illegible]~~ Víme $f'(x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{x-\pi}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)\,dx = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x.$$

Odtud $\pi\sum\frac{1}{k^4} = \left\|\frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}\right\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} \frac{x^4}{16} + \frac{\pi^2}{4}x^2 + \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi}{4}x^3 - \frac{\pi^3}{6}x + \frac{\pi^2 x^2}{12}\,dx$

$$= \frac{32\pi^5}{80} + \frac{2\pi^5}{3} + \frac{\pi^5}{18} - \pi^5 - \frac{\pi^5}{3} + \frac{2\pi^5}{9} = \frac{\pi^5}{90} \Rightarrow \sum\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$ Využijeme příklad 6b) a všimneme si, že pro $x = \pi/2$ je

$\sin nx = \sin n\pi/2 = \quad 0$ pro n sudé

a pro $n = (2m-1)$ je $\sin(2m-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^m$

Proto $\sum\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} = \left(\sum\frac{\sin nx}{n^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ Tušíme, že budeme potřebovat rozvinout v řadu fci x^6

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6\,dx = \frac{2}{7}\pi^6$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6\cos kx = \frac{1}{\pi}\left(\left[x^6\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{6}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x^5 \sin kx\,dx\right) = -\frac{6}{\pi k}\left(\left[-\frac{\cos kx}{k}x^5\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{5}{k}x^4 \cancel{\sin}\cos kx\,dx\right)$$

$$= \frac{12\pi^4}{k^2}\cdot(-1)^k - \frac{30}{\pi k^2}\int x^4\cos kx\,dx = \frac{12\pi^4}{k^2}\cdot(-1)^k - \frac{30}{k^2}\cdot\left(\frac{8\pi^2}{k^2}\cdot(-1)^k - \frac{48}{k^4}\cdot(-1)^k\right)$$

$$= \frac{12\pi^4}{k^2}\cdot(-1)^k - \frac{240\pi^2}{k^4}\cdot(-1)^k + \frac{1440}{k^6}(-1)^k$$

$$\Rightarrow x^6 = \frac{\pi^6}{7} + 12\pi^4\sum\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2} - 240\pi^2\sum\frac{(-1)^k\cos kx}{k^4} + 1440\sum\frac{(-1)^k\cos kx}{k^6} \quad \text{na } [-\pi,\pi]$$

$x = \pi$: $\frac{6}{7}\pi^6 = 12\pi^4\cdot\frac{\pi^2}{6} - 240\pi^2\cdot\frac{\pi^4}{90} + 1440\sum\frac{1}{k^6} \Rightarrow \sum\frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ TRIKEM: $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum\frac{(-1)^n+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Bez triku: rozvoj x^2 z příkladu 7a) a dosadit $x=0$: $0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{(-1)^k}{k^2} \Rightarrow \sum\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$