Matematika pro fyziky NOFY162, LS 21/22

Domácí úkol č. 5 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Najděte v $S'(\mathbb{R})$ řešení rovnice

$$-y'' + 2iay' + k^2 y = \delta_0,$$

kde $a, k \in \mathbb{R},\ k > |a|$.

Ukážeme si řešení oběma používanými způsoby.

(1) **Lepení**: nejprve si napíšeme příslušnou homogenní rovnici: $-y'' + 2iay' + k^2 y = 0$ a najdeme fundamentální systém jejích řešení. Charakteristická rovnice je $-\lambda^2 + 2ia\lambda + k^2 = 0$ a její kořeny jsou $ai \pm \sqrt{k^2 - a^2}$, takže F.S. je $\{e^{(ai+\sqrt{k^2-a^2})x}, e^{(ai-\sqrt{k^2-a^2})x}\}$.

Všimněme si, že žádná z těchto dvou funkcí v prostoru $S'(\mathbb{R})$, protože $\sqrt{k^2 - a^2} > 0$, takže $|e^{(ai\pm\sqrt{k^2-a^2})}x| = e^{\pm\sqrt{k^2-a^2}}x$ roste do $\pm\infty$ rychleji než jakýkoli polynom. Proto se jejich lineární kombinace nebudou vyskytovat ve fundamentálním řešení a toto řešení bude pouze kombinací funkcí

$$
\begin{aligned}
&y(x) = c_- y_-(x) + c_+ y_+(x),\ \text{kde} && \\
&y_-(x) = e^{(ai+\sqrt{k^2-a^2})x}\ (x < 0) && y_-(x) = 0\ (x \geq 0) \\
&y_+(x) = 0\ (x < 0) && y_+(x) = e^{(ai-\sqrt{k^2-a^2})x}\ (x \geq 0)
\end{aligned}
$$

Konstanty c_-, c_+ určíme z podmínek lepení:

$$
\begin{aligned}
&c_+ y_+(0+) - c_- y_-(0-) = c_+ - c_- = 0 \\
&c_+ y'_+(0+) - c_- y'_-(0-) = c_+(ai - \sqrt{k^2 - a^2}) - c_-(ai + \sqrt{k^2 - a^2}) = -1
\end{aligned}
$$

Z první rovnice plyne $c_+ = c_-$, dosazením do druhé tedy dostáváme $c_+(-2\sqrt{k^2 - a^2}) = -1$ a tedy $c_+ = c_- = \frac{1}{2\sqrt{k^2-a^2}}$. Ve výsledku dostáváme jediné fundamentální řešení v prostoru $S(\mathbb{R}')$:

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 - a^2}}(y_- + y_+) = \frac{e^{aix - \sqrt{k^2-a^2}|x|}}{2\sqrt{k^2 - a^2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

(2) **Fourierova transformace**: s použitím známých identit aplikujeme FT na obě strany rovnice, čímž dostáváme

$$
\begin{aligned}
(-(2\pi i\xi)^2 + 2ia(2\pi i\xi) + k^2)\mathcal{F}(y) &= 1 \\
(4\pi^2\xi^2 - 4\pi a\xi + k^2)\mathcal{F}(y) &= 1
\end{aligned}
$$

Polynom $P(\xi) = 4\pi^2\xi^2 - 4\pi a\xi + k^2$ má kořeny $b_\pm = \frac{4\pi a \pm 4\pi i\sqrt{k^2-a^2}}{8\pi^2} = \frac{a\pm i\sqrt{k^2-a^2}}{2\pi}$. Výpočet zpětné Fourierovy transformace

$$y(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i x\xi}}{4\pi^2\xi^2 - 4\pi a\xi + k^2}\, d\xi$$

tedy provedeme použitím reziduové věty a Jordanova lemmatu na funkci

$$f(z) = \frac{e^{2\pi i x z}}{4\pi^2 z^2 - 4\pi a z + k^2} = \frac{e^{2\pi i x z}}{4\pi^2(z-b_+)(z-b_-)},$$

přičemž rozlišíme dva případy:

(a) $x > 0$: pro Jordanovo lemma potřebujeme horní polokruh, tedy křivku

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ kde } \varphi_1(t) = t,\ t \in \langle -R, R\rangle,\ \varphi_2(t) = Re^{it},\ t \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Pro $R \to \infty$ bude $\int_{\varphi_1} f \to y(x)$, $\int_{\varphi_2} f \to 0$ (snadno ověříme předpoklady Jordanova lemmatu), musíme tedy ještě určit $\int_\varphi f$. Křivka φ neprochází žádným pólem funkce z, ale obíhá její pól b_+. Proto je

$$\int_\varphi f = 2\pi i Res(f, b_+) = 2\pi i \frac{e^{2\pi i x b_+}}{4\pi^2(b_+ - b_-)} = i\frac{e^{2\pi i x \frac{a+i\sqrt{k^2-a^2}}{2\pi}}}{2\pi \frac{i\sqrt{k^2-a^2}}{\pi}} = \frac{e^{x(ai-\sqrt{k^2-a^2})}}{2\sqrt{k^2-a^2}}.$$

Tento výraz nezávisí na R a je tedy roven přímo hledané hodnotě $y(x)$ pro $x > 0$.

Uvědomíme si také, že tento výpočet projde i pro $x = 0$ (včetně ověření předpokladů Jordanova lemmatu, které je zde jiné než pro $x > 0$!).

(b) Podobně pro $x < 0$ volíme dolní polokruh a analogickým výpočtem spočteme

$$y(x) = \frac{e^{x(ai+\sqrt{k^2-a^2})}}{2\sqrt{k^2-a^2}},\ x < 0.$$

Dostali jsme tedy přesně totéž řešení jako pomocí lepení, a z teorie Fourierovy transformace na temperovaných distribucích plyne, že toto řešení je v prostoru $S'(\mathbb{R})$.

2. (2 body) Uvažujte posloupnost $\{T_{f_n}\} \subset D'(\mathbb{R})$, kde

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{\cosh(nx)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Určete limitu posloupnosti ve smyslu $D'(\mathbb{R})$.

Opět si ukážeme dvě metody.

(1) Použijeme tzv. **koncentrační lemma**, upravíme si funkci na $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{n}{e^{nx}+e^{-nx}}$ a integrujeme ji s použitím substituce $y = nx$ (pro nějaké zatím obecné meze $a < b \in \mathbb{R}$):

$$I_a^b(n) = \int_a^b \frac{2}{\pi}\frac{n}{e^{nx}+e^{-nx}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{1}{e^y+e^{-y}}\,dy = \frac{2}{\pi}\int_{na}^{nb}\frac{e^y}{e^{2y}+1}\,dy$$

Pomocí substituce $u = e^y$ toto převedeme na

$$I_a^b(n) = \frac{2}{\pi}\int_{e^{na}}^{e^{nb}}\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{\pi}(\operatorname{arctg}(e^{nb}) - \operatorname{arctg}(e^{na}))$$

Je-li nyní $a < 0 < b$, je $\lim\limits_{n\to\infty} I_a^b(n) = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - 0) = 1$, pro $a < b < 0$ nebo $0 < a < b$ je $\lim\limits_{n\to\infty} I_a^b(n) = \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = 0$. Zároveň je vidět, že každý integrál $I_a^b(n)$ je omezený konstantou 1. Podle koncentračního lemmatu tedy platí $T_{f_n} \to \delta_0$.

Poznamenejme ještě, že integrál $I_a^b(n)$ lze spočítat i pomocí rozšíření $\frac{1}{\cosh(nx)} = \frac{\cosh(nx)}{\cosh^2(nx)} = \frac{\cosh(nx)}{\sinh^2(nx)+1}$.

(2) Druhá možnost je postupovat přímo **z definice** konvergence ve smyslu $D'(\mathbb{R})$: uvažujeme libovolnou testovací funkci $\varphi \in D(\mathbb{R})$ a píšeme

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2n}{e^{nx}+e^{-nx}}\cdot\varphi(x)\,dx,$$

dále použijeme substituci $y = nx$, takže

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^y+e^{-y}}\cdot\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\,dy.$$

Díky srovnání s $e^{\mp y}$ v $\pm\infty$, a díky tomu, že φ má kompaktní nosič, vidíme, že pro každé n je integrand omezený integrovatelnou majorantou, takže můžeme zaměnit limitu a integrál (Lebesgueova věta), odtud tedy

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^y+e^{-y}}\cdot\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^y+e^{-y}}\cdot\varphi(0)\,dy = \varphi(0) = \langle\delta_0, \varphi\rangle,$$

kde předposlední rovnost plyne z výpočtů podobných jako u metody 1. Proto je $T_{f_n} \to \delta_0$.

Lukáš Krump, 4.6.2022