

Domácí úkol č. 4 – Komentář

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx.$$

2. (2 body) Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi ix}}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Výpočet najdete v samostatném souboru, děkuji za přehledné řešení Michalu Stratenému. Zde jen několik komentářů.

Měli jste to převážně správně, v úloze 1 se objevila jen sem tam numerická chyba.

V úloze 2 bylo chyb víc, trochu jsem vám napověděl, takže jste se nenechali zmást záporným číslem v exponentu čitatele a věděli jste, že kvůli předpokladům Jordanova lemmatu je potřeba zvolit křivku pod reálnou osou, nicméně mnoho z vás zvolilo křivku tak, že běžela v záporném smyslu, což se musí projevit tak, že v reziduové větě se objeví znaménko minus, což mnohým z vás chybělo. (Někteří z vás zároveň s tím udělali chybu ve výpočtu rezidua v bodě $-i$, dostali jste je se špatným znaménkem, což se kompenzovalo s tou předchozí chybou ve znaménku a výsledek vyšel správně. Nezapomeňte, že $(-i)(-i) = -1$.)

Druhá možnost byla parametrizovat tuto křivku v opačném smyslu, tj. aby obíhala kladně, ale pak se v limitě objeví požadovaný integrál s opačným znaménkem (protože je od $+\infty$ do $-\infty$).

Ještě existuje šikovná třetí možnost (na kterou přišel jeden z vás), a sice že použijete substituaci $z' = -z$, tím se v exponentu čitatele objeví kladné číslo a můžete mít křivku v horní polorovině.

Dále je dobré si uvědomit, že zadaný integrál existuje jen ve smyslu hlavní hodnoty (je tam to x ve jmenovateli), toto tam poznamenalo jen málo z vás, a já jsem vám to většinou taky nevytýkal a body jsem za to nestrhával, ale třeba u zkoušky byste to tam měli správně napsat.

Další věc, kterou je dobré u zkoušky napsat důkladně, je parametrizace všech křivek. Obrázek nestačí.

Také nezapomeňte, že lemma o obcházení pólu v sobě obsahuje limitní vztah, napsáno bez limity to není pravda.