Matematika pro fyziky NOFY162, LS 21/22

Domácí úkol č. 3 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Pro funkci
$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 4z^2 + 4z}$$
určete její Laurentovu řadu v bodě (a) 2, (b) 0, (c) ∞. Ve všech případech určete též oblast konvergence této řady a typ izolované singularity v daném bodě.

Nejprve upravme $z^3 - 4z^2 + 4z = z(z-2)^2$. Jelikož funkce f je racionální, můžeme v každém zadaném bodě použít algebraický postup a vyhnout se tak derivování či integrování (které ovšem taky není nijak složité).

(a) V bodě 2 bude
$$\frac{1}{(z-2)^2 z} = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{1}{(z-2+2)} = \frac{1}{(z-2)^2}\frac{1}{2(\frac{z-2}{2}+1)} =$$
$$= \frac{1}{(z-2)^2}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-2} = \boxed{\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+3}}(z-2)^n}$$
Tato řada konverguje v mezikruží $0 < |z-2| < 2$, bod 2 je dvojnásobný pól funkce f.

(b) V bodě 0 bude
$$\frac{1}{z(z-2)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{4(\frac{z}{2}-1)^2} = \frac{1}{4z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{z}{2}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{4z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^{n-1} = \boxed{\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{n+2}{2^{n+3}}z^n}$$
Tato řada konverguje v mezikruží $0 < |z| < 2$, bod 0 je jednonásobný pól funkce f.

(c) V bodě ∞ nejprve označíme
$$g(z) = f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\frac{1}{z^3} - 4\frac{1}{z^2} + 4\frac{1}{z}} = \frac{z^3}{1 - 4z + 4z^2} = \frac{z^3}{(1-2z)^2}$$
a hledáme Laurentovu řadu této funkce v bodě 0. Tu spočteme
$$\frac{z^3}{(1-2z)^2} = z^3\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\right)^2 = z^3\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2z)^n =$$
$$= z^3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n z^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)2^{n-3}z^n$$

Zpětným dosazením $\frac{1}{z}$ za z dostáváme Laurentovu řadu funkce f v ∞: $\boxed{\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)2^{n-3}z^{-n}}$.

Tato řada konverguje na množině $|z| > 2$, funkce je v ∞ holomorfní (neboli tam má odstranitelnou singularitu).

2. (2 body) Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{\varphi} \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\, dz,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru 4 se středem 1.

Nejprve určeme izolované singularity funkce $f(z) = \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}$: jmenovatel je roven nule právě když $\sin z = 0$ (což zahrnuje i případy, kdy $\cos z = 1$), tedy právě pro $z = k\pi$ pro k celé. Z toho v zadaném kruhu leží body 0 a π. Přitom v bodě 0 má funkce $\frac{z}{\sin z}$ odstranitelnou singularitu (protože její limita je 1), proto se na ni díváme jako na holomorfní na okolí nuly, a funkce $\frac{1}{1-\cos z}$ má v nule pól násobnosti 2, což odvodíme ze znalosti Taylorova rozvoje kosinu:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots.$$

Proto i f má v nule pól násobnosti 2.

V bodě π má funkce pól násobnosti 1, protože z i $1-\cos z$ jsou zde nenulové a $\sin z$ zde má Taylorův rozvoj začínající $(z-\pi) + \dots$.

Nyní spočtěme rezidua v těchto dvou pólech. Podle věty o výpočtu reziduí (varianta $\frac{f}{g}$) máme

$$\operatorname{Res}(f,\pi) = \frac{\pi}{1-\cos\pi} \cdot \frac{1}{\sin'\pi} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

Reziduum v bodě 0 buď můžeme počítat podle věty o výpočtu reziduí (varianta s limitou a derivováním, přičemž je vhodné si výpočet limity usnadnit Taylorovými polynomy nebo l'Hospitalem), nebo si všimneme, že je funkce f sudá, takže všechny liché členy v její Laurentově řadě jsou nulové. Tedy i $\operatorname{Res}(f,0) = 0$.

Nakonec podle reziduové věty je

$$\int_{\varphi} \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\, dz = 2\pi i(0 - \frac{\pi}{2}) = \boxed{-\pi^2 i}$$

Lukáš Krump, 26.4.2022