Matematika pro fyziky NOFY162, LS 21/22

Domácí úkol č. 2 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Spočtěte křivkový integrál

$$\int_\varphi z + \bar{z}\, dz,$$

kde φ je kladně orientovaný obvod půlkruhu, který má střed 1, poloměr 1 a jeho body splňují $\mathrm{Re} z \geq 1$.

Křivka φ je součtem křivek φ_1 a φ_2, kde φ_1 je půlkružnice $\varphi_1(t) = 1 + e^{it}$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $\varphi_1'(t) = ie^{it}$, φ_2 je úsečka $\varphi_2(t) = 1 + (1-t)i$, $t \in \langle 0, 2\rangle, \varphi_2'(t) = -i$. Po každé z těchto křivek integrujeme podle definice (jinak to ani nejde, funkce není holomorfní):

$$\int_{\varphi_1} z + \bar{z}\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + e^{it}) + (1 + e^{-it}) ie^{it}\, dt = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e2it + 2e^{it} + 1\, dt =$$

$$= i \left[\frac{1}{2i} e^{2it} + \frac{2}{i} e^{it} + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = i \left(0 + \frac{2}{i}(i - (-i)) + \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) \right) = 4i + \pi i$$

$$\int_{\varphi_2} z + \bar{z}\, dz = \int_0^2 (1 + (1-t)i + 1 - (1-t)i) \cdot (-i)\, dt = -i \int_0^2 2\, dt = -4i$$

$$\int_\varphi z + \bar{z}\, dz = \int_{\varphi_1} z + \bar{z}\, dz + \int_{\varphi_2} z + \bar{z}\, dz = 4i + \pi i - 4i = \boxed{\pi i}$$

2. (2 body) Spočtěte křivkový integrál

$$\int_\varphi \frac{z+1}{z^3 + 4z}\, dz,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o poloměru 1 se středem (a) 0, (b) $2i$, (c) $-2i$, (d) 2.

U této úlohy by byl výpočet přímo z definice složitý. Výhodné bude nejprve rozložit zadanou funkci na parciální zlomky, vyjde

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3 + 4z} = \frac{1}{4}\frac{1}{z} + \frac{-1-2i}{8}\frac{1}{z - 2i} + \frac{-1+2i}{8}\frac{1}{z+2i} =: f_1(z) + f_2(z) + f_3(z).$$

Dále používáme Cauchyho větu a Cauchyho vzorec (ve zdůvodněních volíme okolí s poloměrem $\frac{3}{2}$, aby vždy obsahovalo zadanou kružnici o poloměru jedna, ale ne ty kořeny jmenovatele (póly funkce f), které leží mimo tuto kružnici):

(a) na $U(0, \frac{3}{2})$ jsou f_2, f_3 holomorfní, proto $\int_{\varphi_a} f(z)dz = \int_{\varphi_a} f_1(z)dz = \frac{1}{4} 2\pi i = \boxed{\frac{\pi i}{2}}$

(b) na $U(2i, \frac{3}{2})$ jsou f_1, f_3 holomorfní, proto $\int_{\varphi_b} f(z)dz = \int_{\varphi_b} f_2(z)dz = \frac{-1-2i}{8} 2\pi i = \boxed{\frac{\pi}{4}(2-i)}$

(c) na $U(-2i, \frac{3}{2})$ jsou f_1, f_2 holomorfní, proto $\int_{\varphi_c} f(z)dz = \int_{\varphi_c} f_3(z)dz = \frac{-1+2i}{8} 2\pi i = \boxed{\frac{\pi}{4}(-2-i)}$

(d) na $U(2, \frac{3}{2})$ holomorfní všechny tři sčítance, proto $\int_{\varphi_d} f(z)dz = \boxed{0}$.

Lukáš Krump, 4.4.2022