Matematika pro fyziky NOFY162, LS 21/22

Domácí úkol č. 1 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Najděte Fourierovu řadu pro funkci

$$f(x) = \sin\frac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi),$$

určete funkci, která je jejím součtem pro každé $x \in \mathbb{R}$ a nakreslete graf této funkce.

Zadaná funkce je zřejmě lichá, proto budou všechny cosinové koeficienty ve Fourierově řadě (a_n) nulové a počítáme tedy sinové koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx\, dx$$

Můžeme například použít substituci $x = 2y$ a pak dvakrát per partes:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y \sin 2ny\ 2dy = \frac{2}{\pi}\left([-\cos y\sin 2ny]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos y\ 2n\cos 2ny\ dy\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\ 2n\cos 2ny\ dy\right) = \frac{4n}{\pi}\left([\sin y\cos 2ny]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\ 2n\sin 2ny\ dy\right) = \\
&= \frac{4n}{\pi}(2(-1)^n + \pi n b_n) = \frac{8n(-1)^n}{\pi} + 4n^2 b_n
\end{aligned}$$

odkud snadnou úpravou získáme

$$b_n = \frac{8(-1)^n}{\pi}\frac{n}{1-4n^2}.$$

Fourierova řada zadané funkce je tedy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi}\frac{n}{1-4n^2}\sin nx}$$

Podle Jordanova-Dirichletova kritéria je součtem této řady periodická funkce

$$g(x) = \begin{cases} \sin\frac{x-2k\pi}{2}, & x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi) \\ 0, & x = 2k\pi \end{cases}$$

a to proto, že f je na $(-\pi, \pi)$ spojitá a $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) + \lim\limits_{x\to\pi} f(x)\right) = 0$.

2. (2 body) Najděte holomorfní funkci $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ (na maximálním možném definičním oboru) splňující

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2},$$

výslednou funkci f zapište jako funkci proměnné z.

Funkce $f(z)$ má být holomorfní, musí tedy splňovat Cauchyho-Riemannovy podmínky, konkrétně:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \tag{2}$$

$$= -2y + 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pro zjištění funkce v nejprve integrujeme vztah (1) podle y:

$$v(x,y) = \int 2x + 5 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dy = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + C(x).$$

Podobně pak integrujeme vztah (2) podle x, předtím jej ovšem vynásobíme -1:

$$v(x,y) = \int 2y - 1 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx = 2xy - x - \frac{x}{x^2+y^2} + D(y).$$

Přitom integrály z lomených výrazů nemusíme složitě počítat, najdeme je snadno porovnáním s předchozím derivováním (stačí zaměnit roli x a y). Porovnáním obou vyjádření funkce v pak snadno určíme $C(x) = -x$, $D(y) = 5y$, takže

$$v(x,y) = 2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Druhou možností je spočítat pouze první integrál (podle y), ten zderivovat podle x a porovnat s $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Nyní sestavíme funkci v komplexní proměnné z:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(2xy + 5y - x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy + 5(x+iy) + (y - ix) - \frac{y+ix}{x^2+y^2} =$$

$$= (x+iy)^2 + 5(x+iy) - i(x+iy) - \frac{i(x-iy)}{(x-iy)(x+iy)} =$$

$$= z^2 + (5-i)z - \frac{i\bar{z}}{\bar{z}z} = \boxed{z^2 + (5-i)z - \frac{i}{z}}$$

a tato funkce je definovaná a holomorfní v $\mathbb{C} - \{0\}$. Ještě poznamenejme, že tímto zadáním je funkce $v(x, y)$ určena jednoznačně až na reálnou konstantu a tedy $f(z)$ je určena jednoznačně až na imaginární konstantu.

Lukáš Krump, 12.3.2022