Početní část 2 - Krump

1. Pro funkcionál
$$F(y) = \int_1^2 x^2(y')^2 + 2yy'dx$$
(a) napište jeho Gateauxovu derivaci v bodě y a ve směru h pro $y, h \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2\rangle)$;
(b) najděte jeho lokální extrémy na množině
$$M = \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2\rangle);\ y(1) = 6,\ y(2) = 4\}.$$

2. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti
$$f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}$$
pro
(a) $x \in (0, 1\rangle$,
(b) $x \in \langle 1, +\infty)$,
(c) $x \in \mathbb{R}_+$.

3. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

4. Uvažujme množinu
$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq |y|\}$$
a vektorovou funkci
$$\vec{F}(x, y) = (x - y, x + y).$$
Přímým výpočetem dokažte v tomto případě platnost Greenovy věty.

Řešení:

1. Pro funkcionál

$$F(y) = \int_1^2 x^2(y')^2 + 2yy'dx$$

(a) napište jeho Gateauxovu derivaci v bodě y a ve směru h pro $y, h \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2\rangle)$; (b) najděte jeho lokální extrémy na množině

$$M = \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2\rangle);\ y(1) = 6,\ y(2) = 4\}.$$

(a) Standardním způsobem spočteme $D_h F(y) = \int_1^2 2x^2y'h' + 2hy' + 2yh'dx$.

(b) Integrand je zadaný funkcí $f(x, y, z) = x^2z^2 + 2yz$, její parciální derivace jsou

$$f_y(x, y, z) = 2z,\ f_z(x, y, z) = 2x^2z + 2y.$$

Sestavíme EL rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= f_y(x, y, y') - \frac{\partial}{\partial x} f_z(x, y, y') = 2y' - (2x^2y' + 2y)' = -(2x^2y')' \\ x^2y' &= c \\ y' &= \frac{c}{x^2} \\ y &= \frac{a}{x} + b \quad \text{a z počátečních podmínek dopočteme extremálu} \\ y_0 &= \boxed{\frac{4}{x} + 2} \end{aligned}$$

Ověříme, zda je tato extremála některým lokálním extrémem. Nejprve zkusíme ověřit konvexitu pomocí Hessovy matice:

$$H_g(y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2x^2 \end{pmatrix},$$

což je indefinitní matice, tedy zatím nevíme nic. Sestavíme proto Jacobiho rovnici:

$$P(x) = f_{zz}(x, y_0, y_0') = 2x^2,\ Q(x) = f_{yy}(x, y_0, y_0') - \frac{\partial}{\partial x} f_{yz}(x, y_0, y_0') = 0 - 2' = 0$$

$$-(Ph')' + Qh = -(2x^2h')' = 0$$

Pro h máme tedy stejný vztah jako v EL rovnici pro y, proto jsou řešení Jacobiho rovnice tvaru $h(x) = \frac{A}{x} + B$. Z podmínky $h(1) = h(x) = 0,\ x \in (1, 2\rangle$ pak plyne $x = 1$, takže neexistují konjugované body k bodu 1. Jelikož je $f_{zz}(x, y_0, y_0') = 2x^2 > 0$, je extremála y_0 bodem $\boxed{\text{lokálního minima}}$.

2. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = n^2 x e^{-n^2x^2}$$

pro
(a) $x \in (0, 1\rangle$,
(b) $x \in \langle 1, +\infty)$,
(c) $x \in \mathbb{R}_+$.

Pro libovolné pevné $x > 0$ vidíme použitím škálovacích limit, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Také snadno vidíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je f_n kladná v celém $\mathbb{R}_+$ a že $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, potřebujeme tedy zjistit maximum f_n na $\mathbb{R}_+$. Zderivujeme

$$f_n'(x) = n^2 e^{-n^2x^2} + n^2 x(-2n^2 x)e^{-n^2x^2} = e^{-n^2x^2}(n^2 - 2n^4x^2)$$

a $f_n'(x) = 0$ pro $x_n := \frac{1}{\sqrt{2}n}$. Toto x_n je tedy bodem maxima funkce f_n na $\mathbb{R}_+$, zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ a $f_n(x_n) = \frac{n}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \to +\infty$. Proto je stejnoměrná konvergence „pokažená u nuly“, přesněji posloupnost nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(0, \alpha)$, tedy ani na intervalu $(0, 1\rangle$, ani na $\mathbb{R}_+$.

Z vyšetření průběhu funkce f_n dále plyne, že f_n je na intervalu $(x_n, +\infty)$ klesající, pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \le 1$, proto platí

$$x \ge 1 \implies f_n(x) \le f_n(1) \to 0,$$

tedy posloupnost konverguje stejnoměrně na $\langle 1, +\infty)$.

Protože však $x_n \to 0$, existuje pro každé $\alpha > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna $n \ge n_0$ je $x_n < \alpha$. Proto je každá f_n (pro $n \ge n_0$) klesající na $\langle \alpha, +\infty)$ a opět díky této monotonii máme stejnoměrnou konvergenci na $\langle \alpha, +\infty)$, a tedy lokálně stejnoměrnou konvergenci na každém z intervalů (a), (b), (c).

3. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$$x^2+y^2+z^2=1,\ (x^2+y^2)^2=x^2-y^2.$$

První rovnice zadává jednotkovou sféru se středem v počátku, druhá, pokud ji uvažujeme v rovině, zadává křivku (lemniskátu), která je souměrná podle osy x i y a pro její body zřejmě platí $|x|>|y|$. Plochu, ohraničenou pravou polovinou této křivky (tj. pro $x>0$) lze parametrizovat polárními souřadnicemi $x=r\cos\varphi, y=\sin\varphi$, $\varphi\in\langle\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\rangle$. Omezení pro r odvodíme ze zadané rovnice: pro body křivky platí $r^4=r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$, tedy $r^2=\cos(2\varphi)$, takže pro parametrizaci plochy omezené pravou částí lemniskáty máme $r\in\langle 0,\sqrt{\cos(2\varphi)}\rangle$.

Tyto polární souřadnice pak doplníme na parametrizaci poloviny celého tělesa položením $z=s,\ s\in\langle-\sqrt{1-r^2},\sqrt{1-r^2}\rangle$. Přehledně

$$\Phi:\begin{cases}x &= r\cos\varphi\\ y &= r\sin\varphi\\ z &= s\end{cases},\ \varphi\in\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\rangle,\ r\in\langle 0,\sqrt{\cos(2\varphi)}\rangle,\ s\in\langle-\sqrt{1-r^2},\sqrt{1-r^2}\rangle.$$

Pak spočteme (nebo víme) $J_\Phi=r$, využijeme symetrie tělesa podle roviny yz (objem bude dvojnásobkem objemu jeho poloviny dané $x>0$) a integrujeme:

$$\lambda_3(M)=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}1\cdot r\,ds\,dr\,d\varphi=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}}2r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\varphi=$$

$$[\text{subst. } t=1-r^2,\ dt=-2rdr,\ r=0\implies t=1,\ r=\cos(2\varphi)\implies t=1-\cos(2\varphi)]$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{1-\cos(2\varphi)}^{1}\sqrt{t}\,dt\,d\varphi=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{1-\cos(2\varphi)}^{1}d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-(1-\cos(2\varphi))^{\frac{3}{2}})\,d\varphi=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sqrt{2}|\sin^3\varphi|)\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi\right)=\boxed{\frac{2}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2})}$$

4. Uvažujme množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge |y|\}$$

a vektorovou funkci

$$\vec{F}(x, y) = (x - y, x + y).$$

Přímým výpočetem dokažte v tomto případě platnost Greenovy věty.

Máme ověřit platnost rovnosti

$$\int_{\partial M} \vec{F} d\vec{s} = \int_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\ dx\ dy.$$

M je čtvrtkruh o poloměru 2 mezi přímkami o směrnicích $-\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{4}$.

Levá strana: ∂M sestává ze tří křivek $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, parametrizujeme je tak, aby obíhaly M v kladném smyslu:
φ_1 parametrizujeme $x = \sqrt{2} - t, y = \sqrt{2} - t, t \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$

$$\int_{\varphi_1} \vec{F} d\vec{s} = \int_0^{\sqrt{2}} 0 \cdot (-1) + 2(\sqrt{2} - t) \cdot (-1)\ dt = \int_0^{\sqrt{2}} 2t - 2\sqrt{2}\ dt = -2$$

φ_2 parametrizujeme $x = t, y = -t, t \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$

$$\int_{\varphi_2} \vec{F} d\vec{s} = \int_0^{\sqrt{2}} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)\ dt = 2$$

φ_3 parametrizujeme $x = 2\cos t, y = 2\sin t, t \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle$

$$\int_{\varphi_3} \vec{F} d\vec{s} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2(\cos t - \sin t)(-2\sin t) + 2(\cos t + \sin t)(2\cos t)\ dt =$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + \cos t \sin t\ dt = 2\pi$$

Celkově $\int_{\partial M} \vec{F} d\vec{s} = -2 + 2 + 2\pi = \boxed{2\pi}$

Pravá strana: $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$, proto

$$\int_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)\ dx\ dy = \int_M 2\ dx\ dy = 2\lambda_2(M) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4\pi = \boxed{2\pi}$$

neboť jde o násobek známého obsahu čtvrtkruhu, což lze spočítat i parametrizací polárními souřadnicemi.