Početní část - 31.1.

1. Najděte všechny rostoucí $y \in C^2([0,1])$, které jsou stacionárním bodem funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 y(x)y'(x)^2 \mathrm{d}x,$$

splňujícím okrajové podmínky $0 < y(0) = p < q = y(1)$.

Spočtěte Gateauxovu derivaci v bodě y a ve směru h pro $y, h \in C^1([0,1])$, $h \neq 0$.

Řešení: Standardním způsobem spočteme

$$D_h F(y) = \int_0^1 2yy'h' + (y')^2 h.$$

Dále jde o funkcionál v integrálním tvaru $F(y) = \int_0^1 f(x, y(x), y'(x))\, dx$ pro $f(x,y,z) = yz^2$. Protože f nezávisí na x (jde o tzv. autonomní rovnici), můžeme použít nutnou podmínku pro tento případ, která (pro $f(x,y,z) = g(y,z)$ a y stacionární bod F) říká, že existuje $C \in \mathbb{R}$, že platí

$$g(y,y') - y'g_z(y,y') = C.$$

Máme

$$g_z(y,z) = 2yz$$

a tedy pro každý stacionární bod y exituje $C \in \mathbb{R}$, že

$$C = y(y')^2 - 2y' \cdot yy' = -y(y')^2.$$

Tedy pro $D = -C$ máme rovnici

$$y(y')^2 = D.$$

Protože y je rostourcí a $y(0) > 0$ je tato rovnice ekvivalentní rovnici

$$E := \frac{3}{2}D = \frac{3}{2}\sqrt{y}y' = (y^{\frac{3}{2}})',$$

která má obecné řešení

$$y = (Ex + F)^{\frac{2}{3}}.$$

Za použití okrajových podmínek dostaneme jediné řešení

$$y_{ext} = ((q^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{3}{2}})x + p^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}.$$

Snadno ověříme, že $y'_{ext} > 0$ na $[0,1]$ a tedy je pro něj Euler-Lagrangeova rovnice ekvivialentní v použitou nutnou podmínkou a jde tedy skutečně o stacionární bod (rovněž můžeme do Euler-Lagrangeovy rovnice přímo dosadit).

2. Vyšetřete bodovou, stejnomšrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(0, \infty)$ posloupností $\{f_n\}$ a $\{f_n'\}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n}, \quad x \in (0, \infty).$$

Řešení:

Zjevně $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \to 0$, $n \to \infty$, a tedy $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně (a tedy i bodově a lokálně stejnoměrně) na $(0, \infty)$ k 0.

Dále spočteme

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{x^{2n} + 1}.$$

To dává pro $x \in (0, \infty)$

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Bodová limita f_n' tedy není spojitá (a všechny f_n' spojité jsou), tedy konvergence nemůže být lokákně stejnoměrná (a tedy ani stenoměrná) na $(0, \infty)$.

Spočtěte $\lambda_2(M)$ pro $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 1 < 3x + 2y < 4, 2x < y < 3x\}$.

Řešení: Použijeme substituci $u = 3x + 2y$ a $v = \frac{y}{x}$, při které dostáváme meze $1 < u < 4$ a $2 < v < 3$. Inverzní zobzazení k $\varphi(x,y) = (3x + 2y, \frac{y}{x})$ na M existuje a je rovno

$$\varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{u}{2v+3}, \frac{uv}{2v+3} \right),$$

Jacobiho matice má φ^{-1} tvar

$$J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2v+3} & -\frac{2u}{(2v+3)^2} \\ \frac{v}{2v+3} & \frac{3u}{(2v+3)^2} \end{pmatrix}$$

a její determinant má hodnotu $\frac{u}{(2v+3)^2}$. Počítáme tedy integrál

$$\int_M 1 = \int_1^4 \int_2^3 \frac{u}{(2v+3)^2} \, dv \, du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^4 \cdot \left[-\frac{1}{2(2v+3)} \right]_2^3 = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{63} = \frac{5}{42}.$$

Spočtěte

$$F(a,b) = \int_0^\infty 2^{-ax} \frac{\sin bx}{x} \mathrm{d}x$$

pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$.

Řešení:

Označme $f(x,a,b)$ potom

$$\frac{\partial f}{\partial b}(x,a,b) = 2^{-ax}\cos(bx).$$

Snadno vidíme, že $|\frac{\partial f}{\partial b}(x,a,b)| \leq 2^{-ax}$, což je pro každé $a > 0$ integrovatelná funkce, zároveň $F(a,0) = 0$, $a > 0$ (a f je rovněž spojitá ve všech proměnných) takže můžeme použít větu o derivaci integrálu podle parametru. Dostaneme a pomocí per partes spočteme

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b) \int_0^\infty 2^{-ax}\cos(bx) = \frac{a\log(2)}{a^2\log^2(2) + b^2}.$$

Integrací podle b pak dostaneme

$$\int \frac{a\log(2)}{a^2\log^2(2) + b^2}\, db \stackrel{c}{=} \arctan\left(\frac{b}{a\log(2)}\right).$$

Tedy

$$F(a,b) \stackrel{c}{=} \arctan\left(\frac{b}{a\log(2)}\right).$$

Protože $F(a,0) = 0$ a $\arctan\left(\frac{0}{a\log(2)}\right) = 0$ platí

$$F(a,b) = \arctan\left(\frac{b}{a\log(2)}\right).$$