Početní část - 27.1.

1. Dokažte, že funkce $y = x + 1$ je bodem lokálního maxima funkcionálu
$$F(y) = \int_1^2 x(y')^4 - 2y(y')^3 dx$$
vzhledem k množině
$$M = \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2\rangle);\ y(1) = 2,\ y(2) = 3\}.$$

2. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \sqrt[n]{x^2}$$
pro $x \in \mathbb{R}$ a parametr $p \in \mathbb{R}$.

3. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami
$$x^2 + y^2 = z,\ x^2 + y^2 = x + y,\ z = 0.$$

4. Uvažujme horní polosféru
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$
orientovanou pomocí vnější normály a vektorovou funkci
$$\vec{F}(x, y, z) = (z, x, y).$$
Přímým výpočetem dokažte v tomto případě platnost Stokesovy věty.

Řešení:

1. Dokažte, že funkce $y = x + 1$ je bodem lokálního maxima funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x(y')^4 - 2y(y')^3 dx$$

vzhledem k množině

$$M = \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2\rangle);\ y(1) = 2,\ y(2) = 3\}.$$

Integrand je zadaný funkcí $f(x, y, z) = xz^4 - 2yz^3$, její parciální derivace jsou

$$f_y(x, y, z) = -2z^3,\ f_z(x, y, z) = 4xz^3 - 6yz^2.$$

Sestavíme EL rovnici

$$0 = f_y(x, y, y') - \frac{\partial}{\partial x} f_z(x, y, y') = -2(y')^3 - (1 \cdot 4(y')^3 + 12x(y')^2 y'' - 6y'(y')^2 - 12yy'y'') = \\ = 12y'y''(xy' - y)$$

Snadno ověříme, že funkce $y = x + 1$ tuto rovnici splňuje a splňuje okrajové podmínky.

Ověříme, zda je tato extremála některým lokálním extrémem. Nejprve zkusíme ověřit konvexitu pomocí Hessovy matice:

$$H_g = \begin{pmatrix} 0 & -6z^2 \\ -6z^2 & 12(xz^2 - yz) \end{pmatrix},\ H_g(y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix},$$

což je indefinitní matice, tedy zatím nevíme nic. Sestavíme proto Jacobiho rovnici:

$$P(x) = f_{zz}(x, y_0, y_0') = -12,\ Q(x) = f_{yy}(x, y_0, y_0') - \frac{\partial}{\partial x} f_{yz}(x, y_0, y_0') = 0$$

$$-(Ph')' + Qh = 12h'' = 0$$

všechna řešení h Jacobiho rovnice jsou lineární funkce, což při podmínce $h(1) = h(x) = 0,\ x \neq 1$, znamená, že nutně $h = 0$, takže neexistují konjugované body k bodu 1. Jelikož je $f_{zz}(x, y_0, y_0') = -12 < 0$, je extremála y_0 bodem $\boxed{\text{lokálního maxima}}$.

2. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \sqrt[n]{x^2}$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a parametr $p \in \mathbb{R}$.

Nejprve si můžeme všimnout, že v proměnné x je řada sudá a že pro $x = 0$ je nulová bez ohledu na hodnotu p. Dále pro $x \neq 0$ platí (*) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^2} = 1$ a pro $p \leq 0$ je limita n-tého členu nenulová, tedy není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ konverguje neabsolutně pro $p \in (0, 1\rangle$ (Leibnizovo kritérium) a absolutně pro $p > 1$ (integrální kritérium), totéž platí pro zadanou řadu pro každé $x \neq 0$. Protože konvergence (*) je pro každé x monotonní (zde nutno rozdělit na dva případy $|x| < 1$ a $|x| \geq 1$) a posloupnost $\sqrt[n]{x^2}$ je stejně omezená pro $x \in \langle -K, K\rangle$, je podle „stejnoměrného Abelova“ kritéria zadaná řada stejnoměrně konvergentní na $x \in \langle -K, K\rangle$ a tedy lokálně stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ ovšem není stejnoměrně konvergentní, protože

$$\sup_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt[n]{x^2}}{n^p} = +\infty.$$

3. Spočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$$x^2 + y^2 = x + y,\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0.$$

Rozebereme si, jaké plochy odpovídají jednotlivým rovnicím: první rovnici lze přepsat jako

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

v rovině jde tedy o kružnici se středem $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a poloměrem $\frac{1}{\sqrt{2}}$, která prochází počátkem a v polárních souřadnicích odpovídá úhlu $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle$. Pro každé takové φ pak máme poloměr r omezený zdola nulou a shora hodnotou, kterou zjistíme z první rovnice s dosazenými polárními souřadnicemi $r^2 = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$, čili horní mez je $r = \cos\varphi + \sin\varphi$, a bude užitečné si to ještě upravit na $r = \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$. V $\mathbb{R}^3$ této rovnici odpovídá válcová plocha nad zmíněnou kružnicí s osou rovnoběžnou s osou z. Druhá rovnice popisuje paraboloid, který ohraničuje naše těleso shora a třetí je rovina $z = 0$, která je ohraničuje zdola.

Vhodnou parametrizací budou např. válcové souřadnice:

$$\Phi : \begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= s \end{cases},\ \varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle,\ r \in \langle 0, \sqrt{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \rangle,\ s \in \langle 0, r^2 \rangle.$$

Pak spočteme (nebo víme) $J_\Phi = r$ a můžeme integrovat:

$$\lambda_3(M) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})} \int_0^{r^2} 1 \cdot r\ ds\ dr\ d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})} r^3\ dr\ d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[r^4\right]_0^{\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}\ d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^4(\varphi + \frac{\pi}{4})\ d\varphi = \int_0^\pi \sin^4 y\ dy$$

Tento integrál je roven $\frac{3\pi}{8}$, což zjistíme například porovnáním identity

$$\int_0^\pi \sin^4 y\ dy = \int_0^\pi (1 - \cos^2 y)\sin^2 y\ dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \cos^2 y \sin^2 y\ dy$$

s identitou získanou per partes

$$\int_0^\pi \sin^4 y\ dy = [-\sin^3 y\cos y]_0^\pi - \int_0^\pi (-3\sin^2 y\cos^2 y)\ dy = 0 + 3\int_0^\pi \sin^2 y\cos^2 y\ dy.$$

Závěrem tedy $\lambda_3(M) = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$.

4. Uvažujme horní polosféru

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0\}$$

orientovanou pomocí vnější normály a vektorovou funkci

$$\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y).$$

Přímým výpočetem dokažte v tomto případě platnost Stokesovy věty.

Máme ověřit platnost rovnosti

$$\int_{\partial M} \vec{F} d\vec{s} = \int_M \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S}$$

Levá strana: ∂M je kružnice parametrizovaná $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, z = 0,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a toto je správná orientace vzhledem k zadání, proto

$$\int_{\partial M} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\partial M} z dx + x dy + y dz = \int_0^{2\pi} (0 + \cos\varphi\cos\varphi + 0)\, d\varphi = \boxed{\pi}.$$

Pravá strana:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (1,1,1)$$

a polosféru parametrizujeme např. zobrazením Φ, které bude vyjádřeno

$$x = \cos\theta\cos\varphi, y = \cos\theta\sin\varphi, z = \sin\theta,\ \theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Normála pak je

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi \times \Phi_\theta &= (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) \times (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \\ &= (\cos^2\theta\cos\varphi, \cos^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta), \end{aligned}$$

a např. dosazením $\theta = \varphi = 0$ snadno zjistíme, že se jedná o vnější normálu, jak bylo zadáno. Proto

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (1,1,1) \cdot (\cos^2\theta\cos\varphi, \cos^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta)\, d\varphi\, d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\cos\varphi + \cos^2\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\pi}. \end{aligned}$$