Početní část - 17.1.

1. Na prostoru $C^1([1,2])$ uvažujme funkcionál
$$F(y) = \int_1^2 \frac{(y')^3}{12x^2} - x^2 y'.$$
Uvažme dále množinu
$$M = \{y \in C^1([1,2]),\, y(1) = 0,\, y(2) = K\},$$
kde $K \in \mathbb{R}$ je parametr.
   (a) Pro $y, h \in C^1([1,2])$, $h \neq 0$, spočtěte $D_h F(y)$ a $D^2_{h,h} F(y)$.
   (b) Sestavte Euler-Lagrangeovu rovnici pro F a nalezněte její obecné řešení.
   (c) Dokažte, že funkcionál F má právě jeden stacionární bod $y_{ext} \in M \cap C^2[1,2]$ právě tehdy, když $|K| > \sqrt{12}$.

   (10 bodů).

2. Uvažujte posloupnost funkcí
$$f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$
s parametrem $\alpha > 0$. V závislosti na α rozhodněte o bodové, stejnoměrné a lokálně stejnoměrné konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$
(7 bodů).

3. Pro $a > 0$ definujme $M \subset \mathbb{R}^2$ jako

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{4}} < \sqrt{x}y\}$$

Spočtěte obsah M a křivkový integrál

$$\int_{\partial M} (299x^{987} + y)dx + (x^2 + e^{e^y})dy$$

přes kladně orientovanou hranici M.

Nápověda: pro druhou část je možná výhodné použít Greenovu větu.

(8 bodů).

4. Spočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

Nápověda: uvažujte funkci $F(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(\sin(bx))^2}{x^2}$ *a derivujte podle* b.

(11 bodů)