Početní část - 17.1.

1. Na prostoru $C^1([1,2])$ uvažujme funkcionál

$$F(y) = \int_1^2 \frac{(y')^3}{12x^2} - x^2 y'.$$

Uvažme dále množinu

$$M = \{y \in C^1([1,2]),\, y(1) = 0,\, y(2) = K\},$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je parametr.

(a) Pro $y, h \in C^1([1,2])$, $h \neq 0$, spočtěte $D_h F(y)$ a $D^2_{h,h} F(y)$.

(b) Sestavte Euler-Lagrangeovu rovnici pro F a nalezněte její obecné řešení.

(c) Dokažte, že funkcionál F má právě jeden stacionární bod $y_{ext} \in M \cap C^2[1,2]$ právě tehdy, když $|K| > \sqrt{12}$.

(10 bodů).

Řešení:
(a) Standardním způsobem spočteme, že

$$D_h F(y) = \int_1^2 \frac{(y')^2 h'}{4x^2} - x^2 h',$$
$$D^2_{h,h} F(y) = \int_1^2 \frac{y'(h')^2}{2x^2}.$$

(b) Označme $f(x,y') = \frac{(y')^3}{12x^2} - x^2 y'$. Extremála y musí splňovat Eulerovu–Lagrangeovu rovnici, která má v tomto případě tvar (f nezávisí na y)

$$0 = (\partial_{y'} f(y',x))' = 0 \implies \frac{(y')^2}{4x^2} - x^2 = C \implies C \geq -1$$

a máme

$$y' = \pm 2x\sqrt{C + x^2} \implies y = \pm\frac{2}{3}(C + x^2)^{\frac{3}{2}} + D.$$

(c) Zbývá určit konstanty C a D a popř. vybrat znaménko. Ne vždy však lze konstanty najít. Máme totiž

$$\begin{aligned}|K| = |y(2) - y(1)| &= \left|\int_1^2 y'\right| = \int_1^2 2x\sqrt{C + x^2} \\ &= \frac{2}{3}\left((4 + C)^{3/2} - (1 + C)^{3/2}\right) \geq \int_1^2 2x\sqrt{-1 + x^2} = \sqrt{12}.\end{aligned}$$

Vidíme, že je nutné, aby $|K| \geq \sqrt{12}$. Výše uvedený vztah navíc jednoznačně určuje konstantu $C \geq -1$. Navíc, pokud $|K| = \sqrt{12}$, potom $C = -1$ a $y \notin C^2([1, 2])$. Proto je nutné, aby $|K| > \sqrt{12}$. Vidíme, že y' nemění znaménko na $(1, 2)$ a tedy (použitím podmínky $y(1) = 0$)

$$\begin{aligned}y &= \frac{2}{3}(C + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(C + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{pro } K > \sqrt{12}, \\ y &= -\frac{2}{3}(C + x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(C + 1)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{pro } K < -\sqrt{12}.\end{aligned}$$

2. Uvažujte posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

s parametrem $\alpha > 0$. V závislosti na α rozhodněte o bodové, stejnoměrné, popř. lokálně stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

(7 bodů).

Řešení: Použijeme následující vztahy:

$$\sin y \le y \quad \text{pro } y \ge 0,$$
$$\sin y \ge \frac{y}{2} \quad \text{pro } y \in [0, \pi/4].$$

Začneme s nutnou podmínkou stejnoměrné konvergence na $\mathbb{R}$, tzn. zkoumáme zda

$$f_n(x) \rightrightarrows 0 \text{ na } \mathbb{R}.$$

Nicméně ale platí, že

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\left(\frac{x}{n^\alpha}\right)\right| = 1,$$

protože např. $f_n(x) = 1$ pro $x = n^\alpha \pi/2$. Řada tedy nemůže konvergovat stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Uvažujme nyní $\alpha \in (0, 1]$. Ukážeme, že pro tato α řada nekonverguje ani bodově (kromě bodu nula, kde konverguje triviálně). Omezíme se pouze na kladná $x \in \mathbb{R}$ (pro záporná to odůvodníme podobně). Pro dané $x \in \mathbb{R}$ najdeme n_0 tak, aby $x/n_0^\alpha \le \pi/2$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x) + \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) \ge \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(x) + \frac{x}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-\alpha} = \infty.$$

Pro $\alpha \in (0, 1]$ tedy řada nekonverguje ani bodově vyjma bod $x = 0$.

Pro $\alpha > 1$ ale ukážeme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně. Buď $M > 0$ libovolné. Potom $\forall x \in [-M, M]$

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^\alpha} \leq \frac{M}{n^\alpha}.$$

Řada $\sum n^{-\alpha}$ je ale konvergentní a nezávislá na x (pro $\alpha > 1$) a tedy nutně řada $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $[-M, M]$. Protože M bylo libovolné, dostaneme, že řada $\sum f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

3. Pro $a > 0$ definujme $M \subset \mathbb{R}^2$ jako

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{4}} < \sqrt{x}y\}$$

Spočtěte obsah M a křivkový integrál

$$\int_{\partial M} (299x^{987} + y)dx + (x^2 + e^{e^y})dy$$

přes kladně orientovanou hranici M.

Nápověda: pro druhou část je možná výhodné použít Greenovu větu.

(8 bodů).

Řešení: Zkusme zavést

$$\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= ra \sin t \end{aligned}$$

Protože, x a y jsou kladná, uvažujeme pouze $\varphi \in (0, \pi/2)$. Tato transformace má Jakobián $J = ar$. Nyní jednoduše máme,

$$0 \leq \left(x^2 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{5}{4}} < \sqrt{x}y \Leftrightarrow 0 < r < a\sqrt{\cos t} \sin t$$

Množina M je tedy dána pro meze $\varphi \in (0, \pi/2)$ a $r \in (0, a\sqrt{\cos t} \sin t)$. Její obsah tedy můžeme spočítat jako

$$\begin{aligned} |M| &= \int_M dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt{\cos t} \sin t} ar\, dr\, dt \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t dt = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

Pro výpočet křivkového integrálu použijeme Greenovu větu a máme tedy (využijeme předchozí výpočet)

$$\int_{\partial M} (299x^{987} + y)dx + (x^2 + e^{e^y})dy = \int_M \left(\frac{\partial(x^2 + e^{e^y})}{\partial x} - \frac{\partial(299x^{987} + y)}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$= \int_M (2x - 1)\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt{\cos t}\sin t} (2r\cos t - 1) ar\, dr\, dt$$

$$= -\frac{a^3}{6} + \frac{2a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{\frac{5}{2}} \sin^3 t\, dt = -\frac{a^3}{6} + \frac{2a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos t)^{\frac{5}{2}} - (\cos t)^{\frac{9}{2}}) \sin t\, dt$$

$$= -a^3 \frac{77 - 32a}{6 \cdot 7 \cdot 11}$$

4. Spočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

Nápověda: uvažujte funkci $F(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(\sin(bx))^2}{x^2}$ *a derivujte podle* b.

(11 bodů)

Řešení: Zavedeme značení a formálně spočítáme

$$\begin{aligned}
f(a,b,x) &= \frac{e^{-ax}\sin^2(bx)}{x^2},\\
F(a,b) &= \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin^2(bx)}{x^2}\\
\partial_b F(a,b) &= \int_0^\infty \partial_b f(a,b,x) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin(2bx)}{x}\\
\partial_{b^2} F(a,b) &= \int_0^\infty \partial_{b^2} f(a,b,x) = 2\int_0^\infty e^{-ax}\cos(2bx) = \frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-ax}\sin(2bx)\\
&= \frac{a}{2b^2} - \frac{a^2}{2b^2}\partial_{b^2}F(a,b) \implies \partial_{b^2}F(a,b) = \frac{2a}{a^2+4b^2}.
\end{aligned}$$

Nyní ověříme všechny potřebné předpoklady, abychom mohli výše uvedené formální výpočty považovat za pravdivé. Nejdříve $f(a,b,x)$, $\partial_b f(a,b,x)$ i $\partial_{b^2} f(a,b,x)$ jsou Carathéodoryovské funkce. Navíc máme (zde je $\varepsilon > 0$ libovolné, ale pevné)

$$\begin{aligned}
|f(a,b,x)| &\le \frac{2\varepsilon^{-2}}{1+x^2} && \forall (a,b) \in [0,\infty)\times[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}],\\
|\partial_b f(a,b,x)| &\le \varepsilon^{-1}e^{-\varepsilon x} && \forall (a,b) \in [\varepsilon,\infty)\times[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}],\\
|\partial_{b^2} f(a,b,x)| &\le e^{-\varepsilon x} && \forall (a,b) \in [\varepsilon,\infty)\times[-\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}].
\end{aligned}$$

V každém odhadu jsme našli integrovatelnou majorantu nezávislou na a a b a tedy na daných intervalech je funkce $F(a,b)$ spojitá a má i spojité první a druhé drivace podle b.

Ze vzorce pro druhou derivace podle b získáme

$$\partial_b F(a,b) = \int \frac{2a}{a^2+4b^2}\,db = \frac{2}{a}\int \frac{1}{1+(2b/a)^2}\,db = \arctan(2b/a) + C$$

Konstantu C určíme z hodnoty $\partial_b F(a,0)$ a tedy

$$\partial_b F(a,0) = 0 \implies \partial_b F(a,b) = \arctan(2b/a).$$

Nyní můžeme zintergovat ještě jednou

$$
\begin{aligned}
F(a,b) &= \int \arctan(2b/a)\,db = b\arctan(2b/a) - \int \frac{2ab}{a^2+4b^2} \\
&= b\arctan(2b/a) - \frac{a\ln(a^2+4b^2)}{4} + C.
\end{aligned}
$$

Konstantu C opět určíme z podmínky na $F(a,0)$

$$
F(a,0) = 0 \implies F(a,b) = b\arctan(2b/a) - \frac{a\ln(a^2+4b^2)}{4} + \frac{a\ln a}{2}
$$

Nakonec, protože $F(a,b)$ je spojitá vzhledem k $a \in [0,\infty)$ máme

$$
F(0,b) = \lim_{a\to 0_+} F(a,b) = \lim_{a\to 0_+} b\arctan(2b/a) - \frac{a\ln(a^2+4b^2)}{4} + \frac{a\ln a}{2} = \frac{|b|\pi}{2}
$$

a tedy

$$
\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}.
$$