# Početní část - 10.1.

1. Uvažme funkcionál

$$F(y) = y^2(1) + (y(0) - 1)^2 + \int_0^1 y + \frac{1}{2}(y')^2$$

na prostoru $C^1([0,1])$. Označme

$$C_0^1([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 0\}.$$

   (a) Pro $y \in C^1([0,1])$ a $h \in C^1([0,1]) \setminus \{0\}$ spočtěte $D_h F(y)$ a $D^2_{h,h} F(y)$.

   (b) Dokažte, že $F$ je konvexní na $C^1([0,1])$.

   (c) Nalezněte všechny stacionární body $F$ vzhledem k $C_0^1([0,1])$.

   (d) Vyšetřete extrémy funcionálu $F$ na $C^1([0,1])$.

   (10 bodů).

2. Uvažujte posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [n^2 - n, n^2 + n] \\ 0 & \text{pro } x \notin [n^2 - n, n^2 + n] \end{cases}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$. Rozhodněte o bodové, stejnoměrné, popř. lokálně stejnoměrné konvergenci na $(-\infty, \infty)$.

Uvažujte posloupnost funkcí $g_n(x) := n^\alpha f_n(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. V závislosti na $\alpha$, rozhodněte o bodové, stejnoměrné, popř. lokálně stejnoměrné konvergenci posloupnosti $g_n$. Pro která $\alpha$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx?$$

(8 bodů).

3. Buď $R > 0$ libovolné. Definujme

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + |z| \le R^2\}$$
$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - 2Rx < 0\}$$

Spočtěte objem množiny $A \cap B$.

Můžete použít vzorečky $\cos^4 a = \frac{1}{8}(4\cos(2a) + \cos(4a) + 3)$, $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$ (10 bodů).

4. Uvažme funkci

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{(x+1)^2}\, dx.$$

(a) Určete definiční obor $F$ a ukažte, že $F$ je na svém definičním oboru spojitá.

(b) Ukažte, že $F'$ a $F''$ existují na $(0, \infty)$.

(c) Ukažte, že na $(0, \infty)$ platí $F''(a) - 2F'(a) + F(a) = \frac{1}{a}$.

(d) Vyšetřete monotonii a konvexitu/konkávitu $F$ a načrtněte graf $F$.

(8 bodů).