Početní část - 10.1.

1. Uvažme funkcionál

$$F(y) = y^2(1) + (y(0) - 1)^2 + \int_0^1 y + \frac{1}{2}(y')^2$$

na prostoru $C^1([0,1])$. Označme

$$C_0^1([0,1]) = \{f \in C^1([0,1]) : \ f(0) = f(1) = 1\}.$$

(a) Pro $y \in C^1([0,1])$ a $h \in C^1([0,1]) \setminus \{0\}$ spočtěte $D_h F(y)$ a $D^2_{h,h} F(y)$.

(b) Dokažte, že F je konvexní na $C^1([0,1])$.

(c) Nalezněte všechny stacionární body F vzhledem k $C_0^1([0,1])$.

(d) Vyšetřete extrémy funcionálu F na $C^1([0,1])$.

(10 bodů).

Řešení:

Určíme první Gateauxovu derivaci. Z definice

$$\begin{aligned}
DF(y)[h] &:= \lim_{t\to 0} \frac{F(y+th) - F(y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{y(1)^2 + 2ty(1)h(1) + t^2h(1)^2 - y(1)^2}{t} \\
&+ \lim_{t\to 0} \frac{y(0)^2 + 2ty(0)h(0) + t^2h(0)^2 - y(0)^2}{t} \\
&+ \lim_{t\to 0} \frac{-2y(0) - 2th(0) + 2y(0)}{t} \\
&+ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \left(y + th - y + \frac{(y')^2}{2} + t'yh' + \frac{(th')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} \right) \\
&= 2y(1)h(1) + 2y(0)h(0) - 2h(0) + \lim_{t\to 0} \left[\int_0^1 (h + y'h') + t \int_0^1 \frac{(h')^2}{2} \right] \\
&= 2y(1)h(1) + 2y(0)h(0) - 2h(0) + \int_0^1 (h + y'h')
\end{aligned}$$

Obdobně

$$\begin{aligned}
D^2F(y)[h,h] &:= \lim_{t\to 0} \frac{DF(y+th)[h] - DF(y)[h]}{t} \\
&= h(1)(2h(1) + h'(1)) + h(0)(2h(0) - h'(0)) - \int_0^1 hh'' \\
&= 2h^2(1) + 2h^2(0) + \int_0^1 (h')^2.
\end{aligned}$$

Vidíme, že druhé derivace jsou kladné a že $D^2F(y)[h,h] = 0$ jen pokud $h \equiv 0$. Jakákoliv extremála tedy bude minimem. Obdobně lze říci, že F je konvexní a tedy jakákoliv extremála je opět minimem.

Dále najdeme extremálu y_{ext} vzhledem k $C_0^1[0,1]$. CHceme tedy, aby y_{ext} splňovalo

$$DF(y_{ext})[h] = 0$$

pro každé $h \in C_0^1[0,1]$. Pro tato h platí

$$DF(y_{ext})[h] = \int_0^1 h(1 - y'').$$

Pokud má být integrál výše nulový pro všechna taková h, pak nutně

$$y''_{ext} = 1.$$

Obecné řešení je tedy $y_{ext} = \frac{x^2}{2} + Ax + B$. Okrajové podmínky splňuje pouze, když $A = -\frac{1}{2}$ a $B = 0$.

Má-li být y stacionárním bodem vzhledem k $C^1[0,1]$, musí být stacionárním bodem i vzhledem k $C_0^1[0,1]$. Stačí tedy zjistit, pro která A a B splňuje y_{ext} rovnici $DF(y_{ext})[h] = 0$ pro všechna $h \in C^1[0,1]$.

Dosazení dostaneme

$$DF(y_{ext})[h] = 2h(1)\left(\frac{1}{2} + A + B\right) + 2h(0)(B-1).$$

Aby byla výše uvedená derivace rovna nule v každém směru h, je tedy nutné, aby $A = -\frac{3}{2}$ a $B = 1$. Výsledný minimizér je tedy $y_{ext} = \frac{x^2 - 3x}{2} + 1$.

2. Uvažujte posloupnost funkcí

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [n^2 - n, n^2 + n] \\ 0 & \text{pro } x \notin [n^2 - n, n^2 + n] \end{cases}$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$. Rozhodněte o bodové, stejnoměrné, popř. lokálně stejnoměrné konvergenci na $(-\infty, \infty)$.

Uvažujte posloupnost funkcí $g_n(x) := n^\alpha f_n(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. V závislosti na α, rozhodněte o bodové, stejnoměrné, popř. lokálně stejnoměrné konvergenci posloupnosti g_n. Pro která α platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, dx?$$

(8 bodů).

Řešení: Evidentně platí, že pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0,$$

protože jen konečný počet členů těchto posloupností je nenulových. Zkusme nyní ověřit setjnoměrnou konvrgenci na $\mathbb{R}$ a na intervalu $(-\infty, N)$, kde $N \in \mathbb{N}$ je libovolné. Máme postupně

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| &= 1 \quad && \text{pro } n \in \mathbb{N}, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| &= n^\alpha \quad && \text{pro } n \in \mathbb{N}, \\ \sup_{x\in(-\infty,N]} |f_n(x)| &= 0 \quad && \text{pro } n > N, \\ \sup_{x\in(-\infty,N]} |g_n(x)| &= 0 \quad && \text{pro } n > N. \end{aligned}$$

Ihned z definice tedy vidíme, že

$$\begin{aligned} f_n &\rightrightarrows 0 \quad && \text{na } (-\infty, N], \\ g_n &\rightrightarrows 0 \quad && \text{na } (-\infty, N] \end{aligned}$$

a tedy obě posloupnosti konergují lokálně stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$. Na druhou stranu, ihned je vidět, že posloupnost f_n nekonverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$. Konečně, posloupnost g_n konverguje stejnoměrně na $(-\infty, \infty)$ právě thedy, když $\alpha < 0$.

Konečně

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{n^2-n}^{n^2+n} n^\alpha\,dx = \lim_{n\to\infty} 2n^{\alpha+1},$$

což se rovná nule pouze pokud $\alpha < -1$. Je tedy vidět, že stejnoměrná konvergence nestačí pro přehození limity a integrálu na nekonečných intervalech.

3. Buď $R > 0$ libovolné. Definujme

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + |z| \leq R^2\}$$
$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - 2Rx < 0\}$$

Spočtěte objem množiny $A \cap B$.

Můžete použít vzorečeky $\cos^4 a = \frac{1}{8}(4\cos(2a) + \cos(4a) + 3)$, $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$ (10 bodů).

Řešení: Zavedeme

$$\begin{aligned} x &= r\cos t + R, \\ y &= r\sin t, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Tato transformace má Jakobián $J = r$. Množina B je popsána mezemi $z \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 2\pi)$ a $r \in [0, R)$. Určíme ještě meze z množiny A:

$$R^2 \geq x^2+y^2+|z| = R^2+r^2+2Rr\cos t+|z| \implies 0 > r(r+2R\cos t)+|z|.$$

Konečné meze tedy budou

$$\begin{aligned} &t \in (\pi/2, 3\pi/2), \\ &r \in (0, \min\{-2R\cos t, R\}), \\ &z \in (r(r+2R\cos t), -r(r+2R\cos t)). \end{aligned}$$

Objem pak tedy spočteme

$$\lambda_3(A \cap B) = \int_{A\cap B} 1\ dx\ dy\ dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\min\{-2R\cos t, R\}} \int_{r(r+2R\cos t)}^{-r(r+2R\cos t)} r\ dz\ dr\ dt$$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{\min\{-2R\cos t, R\}} r^3 + 2Rr^2\cos t\ dr\ dt$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{-2R\cos t} r^3 + 2Rr^2\cos t\ dr\ dt - 4\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \int_0^{R} r^3 + 2Rr^2\cos t\ dr\ dt$$

$$= \frac{16R^4}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos^4 t\ dt - \frac{R^4}{3}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 3 + 8\cos t\ dt$$

$$= \frac{4R^4}{3}[3t/2 + \sin 2t + \frac{\sin 4t}{8}]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{R^4}{3}[3t + 8\sin t]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= \frac{3R^4\sqrt{3}}{4}$$

4. Uvažme funkci

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{(x+1)^2}\, dx.$$

(a) Určete definiční obor F a ukažte, že F je spojitá na svém definičním oboru.

(b) Ukažte, že F' a F'' existují na $(0, \infty)$.

(c) Ukažte, že na $(0, \infty)$ platí $F''(a) - 2F'(a) + F(a) = \frac{1}{a}$.

(d) Vyšetřete monotonii a konvexitu/konkávitu F a načrtněte graf F.

(8 bodů).

Řešení: Označme

$$f(\alpha, x) := \frac{e^{-ax}}{(x+1)^2}.$$

Evidentně, pro $\alpha < 0$, platí $\lim_{x\to\infty} f(\alpha, x) = \infty$ a integrál tedy nemůže existovat. Naopak, pro $\alpha \geq 0$ máme

$$|f(\alpha, x)| \leq \frac{1}{(x+1)^2},$$

což je integrovatelná funkce. Protože je f navíc spojitá, dostáváme, že $F(a)$ je spojitou funkcí na intervalu $[0, \infty]$. Přímou integrací ihned také zjistíme, že

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = 1.$$

Pro výpočet $F'(\alpha)$ a $F''(\alpha)$, spočteme

$$\frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial \alpha} = -\frac{xe^{-ax}}{(x+1)^2},$$
$$\frac{\partial^2 f(\alpha, x)}{\partial \alpha^2} = \frac{x^2e^{-ax}}{(x+1)^2}$$

Uvažujme nyní $a \in (\varepsilon, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$ je pevné a libovolné. Pro tato a platí,

$$\left|\frac{\partial f(\alpha, x)}{\partial \alpha}\right| + \left|\frac{\partial^2 f(\alpha, x)}{\partial \alpha^2}\right| \leq e^{-\varepsilon x},$$

což je integrovatelná majoranta. Na intervalu (ε, ∞) tedy platí

$$F'(a) = \int_0^\infty -\frac{xe^{-ax}}{(x+1)^2}\, dx,$$
$$F''(a) = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-ax}}{(x+1)^2}\, dx.$$

Vidíme tedy, že funkce je klesající a konvexní.
Jednoduchým výpočtem získáme

$$F''(a) - 2F'(a) + F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$$