# Početní část - 5.1.2022

1. Na prostoru $C^1([0,1])$ uvažme funkcionál

$$F(y) = \int_0^1 3y(x)^2 y'(x) - y'(x)^2 + 2xy(x)\,dx.$$

   (a) Pro $h \in C^1([0,1]) \setminus \{0\}$ a $y \in C^1([0,1])$ spočtěte $D_h F(y)$ a $D^2_{h,h}(y)$.

   (b) Nalezněte všechny stacionární body $F$ vzhledem k prostoru všech funkcí $y \in C^1([0,1])$, pro které platí $y(0) = y(1) = 0$.

   (9 bodů)

2. Uvažme posloupnost funkcí

$$f_n(x) = e^{\frac{|x|-n}{|x|+n}} + e^{-\frac{|x|-n}{|x|+n}}$$

   pro $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí:

   (a) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje bodově na $\mathbb{R}$,

   (b) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$,

   (c) posloupnost $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

   (9 bodů)

3. V závislosti na parametru $r > 0$ spočtěte $\displaystyle\int_M x^2 + y^2 + z^2$, kde

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\ y^2 + z^2 \le x^2\right\}$$

   (9 bodů).

4. Dokažte, že platí

$$\int_0^1 \log(x) \cdot \log(x+1)\,dx = 2 - \log(4) - \frac{\pi^2}{12}.$$

   Můžete použít vztah $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (9 bodů).