

## Počtení část - 21.12.2021

1. Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 y^2 + (y')^2 + 4xy$$

vzhledem k množině všech funkcí  $y \in C^1([0, 1])$ , pro které platí  $y(0) = 0$  a  $y(1) = e^2 - 3$  (8 bodů).

**Řešení:**

Platí  $F(y) = \int_0^1 f(x, y, y')$  pro funkci  $f(x, y, z) = 4xy + y^2 + z^2$ . Máme

$$f_y(x, y, z) = 4x + 2y, \quad f_z(x, y, z) = 2z.$$

Euler-Lagrangeova rovnice má tedy tvar

$$4x + 2y - (2y')' = 0,$$

po úpravě dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty 2. řádu

$$y'' - y = 2x.$$

Obecné řešení rovnice je

$$y = Ae^x + Be^{-x} - 2x.$$

Okrajové podmínky jsou  $y(0) = 0$  a  $y(1) = e^2 - 3$  a tedy dostáváme jediný stacionární bod

$$y = e^{x+1} - e^{-x+1} - 2x.$$

Protože  $f_{yy} = 2$ ,  $f_{yz} = 0$  a  $f_{zz} = 2$  a matice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  je pozitivně definitivní je  $F$  konvexní funkcionál a tedy platí, že  $y$  je vzhledem k zadané množině bodem globálního minima  $F$ .

2. Uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2}$$

pro  $x \in (0, \infty)$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení platí

- (a) řada konverguje stejnoměrně na  $(0, \infty)$ ,
- (b) řada konverguje stejnoměrně na  $(0, 1]$ ,
- (c) řada konverguje stejnoměrně na  $[1, \infty)$ ,
- (d) řada konverguje lokálně stejnoměrně na  $(0, \infty)$ .

(10 bodů).

**Řešení:** Položme  $a_n(x) = \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2}$ . Potom

$$a'_n(x) = \frac{n^3 (1 - n^2 x) (n^2 x + 1)}{(n^4 x^2 + 1)^2}.$$

Tedy  $a_n$  nabývá globálního maxima  $\frac{n}{2}$  v bodě  $\frac{1}{n^2}$  (rovněž  $a_n > 0$  na  $(0, \infty)$ ).

Dále

$$a_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Protože  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ , řada nekonverguje stejnoměrně ani na  $(0, \infty)$  ani na  $(0, 1]$  (není splněna nutná podmínka) a (a), ani (b) neplatí.

Volme  $\alpha \in (0, \infty)$  a pro  $x \in [\alpha, \infty)$  položme

$$f_x(y) = \frac{y^3 x}{1 + y^4 x^2}, \quad y > 0.$$

Spočítáme

$$f'_x(y) = xy^2 \frac{3 - y^4 x^2}{(1 + y^4 x^2)^2}.$$

Platí tedy, že  $f_x$  je klesající na  $\left[\frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}, \infty\right)$  a tedy i na  $\left[\frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha}}, \infty\right)$ . A tedy

$$a_n(x) \geq a_{n+1}(x), \quad x \in [\alpha, \infty), \quad n > \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Podle dříve spočteného rovněž platí pro  $n > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  a  $x \in [\alpha, \infty)$

$$0 \leq a_n(x) \leq a_n(\alpha) = \frac{n^3 \alpha}{1 + n^4 \alpha^2} \rightarrow 0$$

a tedy  $a_n \rightrightarrows 0$  na  $[\alpha, \infty)$ , protože  $(-1)^n$  má (stejně) omezené částečné součty platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 x}{1 + n^4 x^2} \rightrightarrows, \quad \text{na } [\alpha, \infty).$$

Tvrzení (c) i (d) tedy platí.

3. Spočítejte  $\int_M 3y^6$ , kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 3, 2x \leq y^2 \leq 4x\}.$$

(9 bodů).

**Řešení:** Budeme integrovat přes množinu

$$\widetilde{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 3, 2x < y^2 < 4x\},$$

platí  $\lambda_2(M \setminus \widetilde{M}) = 0$ . Použijeme substituci  $u = xy$ ,  $v = \frac{y^2}{x}$ ,  $(u, v) \in (0, 3) \times (2, 4) =: U$ . Platí

$$uv = y^3, \quad \frac{u^2}{v} = x^3$$

Pro  $\varphi(x, y) = (xy, \frac{y^2}{x})$  tedy existuje  $\varphi^{-1}$  na  $U$  a platí

$$\varphi^{-1}(u, v) = \left( (uv)^{\frac{1}{3}}, \left( \frac{u^2}{v} \right)^{\frac{1}{3}} \right),$$

$$\varphi^{-1}(U) = \widetilde{M},$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \left( \frac{1}{uv} \right)^{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3} \left( \frac{u^2}{v^4} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} \left( \frac{v}{u^2} \right)^{\frac{1}{3}} & \frac{2}{3} \left( \frac{u}{v^2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

a

$$|\det J_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{3v}.$$

Dále  $y^6 = u^2 v^2$  a  $\det J_{\varphi^{-1}} \neq 0$  na  $U$ . Podle věty o substituci a Fubiniho věty platí

$$\int_{\widetilde{M}} 3y^6 = \int_U 3u^2 v^2 \cdot \frac{1}{3v} = \int_0^3 \int_2^4 u^2 v \, dv \, du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^3 \cdot \left[ \frac{u^2}{2} \right]_2^4 = 9 \cdot (8-2) = 54.$$

4. Spočítejte křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\langle \gamma \rangle} \left( \frac{-ye^{\frac{y}{x}}}{x^2} + x + y \right) dx + \left( \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + x + e^y \right) dy,$$

kde  $\gamma(t) = (\cos t + 2, \sin t + 2)$ ,  $t \in [0, \pi]$  (9 bodů).

**Řešení:**

Pro

$$F(x, y) = \left( \frac{-ye^{\frac{y}{x}}}{x^2} + x + y, \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + x + e^y \right)$$

snadno ověříme

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

a integrací (nebo odhadem) zjistíme  $F = \nabla f$  pro

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + e^{\frac{y}{x}} + e^y.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned} \int_{\langle \gamma \rangle} \left( \frac{-ye^{\frac{y}{x}}}{x^2} + x + y \right) dx + \left( \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + x + e^y \right) dy &= f \circ \gamma(\pi) - f \circ \gamma(0) \\ &= f(1, 2) - f(3, 2) \\ &= \left( \frac{1}{2} + 2 + e^2 + e^2 \right) - \left( \frac{9}{2} + 6 + e^{\frac{2}{3}} + e^2 \right) \\ &= -8 + e^2 - e^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

