Matematika pro fyziky NOFY161, ZS 21/22, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 5 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Ukažte platnost Greenovy věty (tj. spočtěte obě její strany) pro vektorovou funkci

$$F(x,y) = (x^2 + y^2, x + y)$$

a množinu

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \ge 0\}.$$

Zřejmě je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y,$$

na jedné straně Greenovy věty tedy máme

$$\int_M \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_M 1 - 2y\ dxdy,$$

použijeme parametrizaci $\Phi : x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi; \varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\rangle, r \in \langle 0, 2\rangle$, přitom $|J_\Phi| = r$ a počítáme

$$\int_M 1 - 2y\ dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 (1 - 2r\sin\varphi)\cdot r\ drd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3}\sin\varphi\, r^3\right]_{r=0}^2 d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2 - \frac{16}{3}\sin\varphi\ d\varphi = 2\pi + \frac{16}{3}\left[\cos\varphi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \boxed{2\pi - \frac{16}{3}\sqrt{2}}$$

Na druhé straně počítáme křivkový integrál přes okraj množiny M, který si rozdělíme na dvě části:

$$\int_\varphi \vec{F}\ d\vec{s} = \int_{\varphi_1} \vec{F}\ d\vec{s} + \int_{\varphi_2} \vec{F}\ d\vec{s}.$$

Přitom φ_1 je úsečka parametrizovaná $x = t,\ y = -t;\ t \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle,\ \varphi_1'(t) = (1, -1)$, takže

$$\int_{\varphi_1} \vec{F}\ d\vec{s} = \int_{\varphi_1} (x^2 + y^2)dx + (x + y)dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2t^2 \cdot 1 + 0 \cdot 1\ dt = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

(Všimněte si, že v zápise pomocí diferenciálních forem (který ostatně už používáme např. při integraci) můžeme psát $dx = dt, dy = -dt$, takže dosazením vznikne integrál

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2t^2\ dt - 0\ dt$$

a zbytek výpočtu je stejný.)

Dále φ_2 je oblouk parametrizovaný $x = 2\cos\varphi,\ y = 2\sin\varphi,\ \varphi \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\rangle,\ dx = -2\sin\varphi d\varphi,\ dx = 2\cos\varphi d\varphi$ (opět zapsáno pomocí dif. forem), a tedy

$$\int_{\varphi_2} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\varphi_2} (x^2+y^2)dx + (x+y)dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4(-2\sin\varphi d\varphi) + 4(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= 8\left[\cos\varphi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} + \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= -8\sqrt{2} + 4\left(\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right) = -8\sqrt{2} + 4(\frac{\pi}{2} + 0 + 0) = -8\sqrt{2} + 2\pi$$

Celkem tedy

$$\int_{\varphi} \vec{F}\, d\vec{s} = \frac{8}{3}\sqrt{2} + -8\sqrt{2} + 2\pi = \boxed{2\pi - \frac{16}{3}\sqrt{2}}$$

a Greenova věta je pro tento případ ověřena.

2. (2 body) Spočtěte plošný obsah plochy v $\mathbb{R}^3$ zadané vztahy

$$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1;\ z \geq 0.$$

Můžeme použít například parametrizaci

$$\Phi : \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = 1 - r^3 \end{cases} \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ r \in \langle 0, 1\rangle.$$

Potom

$$\Phi_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, -3r^2),\ \Phi_r = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$$

a Gramova matice

$$G = \begin{pmatrix} 1+9r^4 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},\ \sqrt{|G|} = \sqrt{1+9r^4}r,$$

takže počítáme

$$\lambda_2(M) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1\cdot\sqrt{1+9r^4}\cdot r\, dr d\varphi$$

Jednou z možností, jak tento integrál spočítat, je vzpomenout si, že $(\operatorname{argsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, takže $(\operatorname{argsinh}(3r^2))' = \frac{6r}{\sqrt{1+9r^4}}$ a použít následující trik:

$$I := \int 1\cdot\sqrt{1+9r^4}\cdot r\, dr = \int \frac{1+9r^4}{\sqrt{1+9r^4}}\cdot r\, dr = \frac{1}{6}\int \frac{6r}{\sqrt{1+9r^4}}\, dr + \int \frac{9r^5}{\sqrt{1+9r^4}}\, dr$$

Nyní integrál vlevo už známe a na integrál vpravo použijeme per partes: jelikož

$$\int \frac{9r^5}{\sqrt{1+9r^4}}\,dr = \int \frac{36r^3}{2\sqrt{1+9r^4}}\frac{r^2}{2}\,dr = \sqrt{1+9r^4}\cdot\frac{r^2}{2} - \int \sqrt{1+9r^4}\cdot r\,dr.$$

Poslední integrál je ale zase I, takže celkově máme

$$I = \frac{1}{6}\operatorname{argsinh}(3r^2) + \sqrt{1+9r^4}\cdot\frac{r^2}{2} - I$$

$$I = \frac{1}{12}\operatorname{argsinh}(3r^2) + \sqrt{1+9r^4}\cdot\frac{r^2}{4}$$

(Pokud by vás to takhle nenapadlo, tak to zkuste opačně: napřed per partes na integrál I a pak se úpravami dostat k témuž vztahu. Většina z vás to ale zvládla nějak jinak, třebas i s pomocí software.)

Díky nezávislosti proměnných r a φ v původním integrálu pak můžeme psát

$$\boxed{\lambda_2(M) = 2\pi[I]_0^1 = \pi\left(\frac{\operatorname{argsinh}(3)}{6} + \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \doteq 5,91}$$

Lukáš Krump, 12.1.2022