Matematika pro fyziky NOFY161, ZS 21/22, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 4 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Spočtěte objem tělesa M omezeného plochami

$$z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x.$$

Zvolíme parametrizaci

$$\Phi \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = z \end{cases},\ \alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, r \in \langle \cos\alpha, 2\cos\alpha\rangle, z \in \langle 0, r^2\rangle.$$

Pak $|J_\Phi| = r$ a

$$\lambda_3(M) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\alpha}^{2\cos\alpha} \int_0^{r^2} 1 \cdot r\ dzdrd\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\alpha}^{2\cos\alpha} r^3 drd\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=\cos\alpha}^{2\cos\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\ d\alpha = \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 d\alpha =$$

$$= \frac{15}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\ d\alpha =$$

$$= \frac{15}{16}\left(\pi + [\sin 2\alpha]_{\alpha=\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4\alpha}{2}\ d\alpha\right) = \frac{15}{16}(\pi + 0 + \frac{\pi}{2} + 0) = \boxed{\frac{45}{32}\pi}$$

2. (2 body) Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}dx$$

pro $a \in (-1, +\infty)$. Pomůže vám věta o derivaci integrálu podle parametru.

Označme $f(a,x) = \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}$ a chceme nejprve ukázat, že

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)dx.$$

Ověříme proto:

- funkce $x \mapsto f(a,x)$ je zřejmě spojitá a tedy měřitelná na $\mathbb{R}_+$ pro všechna $a \in (-1,+\infty)$;
- $\frac{\partial}{\partial a} f(a,x) = \frac{xe^{-ax}}{xe^x} = e^{-(a+1)x}$ zřejmě existuje pro všechna $a \in (-1,+\infty)$ a (skoro) všechna $x \in \mathbb{R}_+$;
- pro jednu konkrétní hodnotu $a \in (-1,+\infty)$ je $f(a,x)$ integrovatelná: stačí vzít $a = 0$, pak totiž $f(0,x) \equiv 0$;
- nakonec musíme najít integrovatelnou majorantu společnou všem funkcím $\frac{\partial}{\partial a} f(a,x)$: nejprve si všimneme, že pro každé pevné x je funkce $f(a,x)$ v závislosti na a klesající. Bylo by tudíž pěkné, kdybychom mohli majorizovat funkcí $f(-1,x) = \frac{1-e^x}{xe^x}$, ale ta bohužel není integrovatelná (u nuly i u nekonečna se chová jako $\frac{1}{x}$). Budeme tedy muset odrážet od -1: zvolme $\alpha > -1$, pak

  $$\int_0^\infty e^{-(\alpha+1)x} = \left[\frac{e^{-(\alpha+1)x}}{-(\alpha+1)}\right]_{x=0}^\infty = \frac{1}{\alpha+1},$$

  proto je funkce $e^{-(\alpha+1)x}$ integrovatelnou majorantou pro funkce $e^{-(a+1)x}$ pro všechna $a \geq \alpha$.

Všechny podmínky věty o derivaci integrálu podle parametru jsou tedy splněny pro všechna $a \geq \alpha$, proto platí závěr této věty na intervalu $\langle \alpha, +\infty)$, a protože toto lze udělat pro všechna $\alpha > -1$, platí závěr věty na celém intervalu $(-1,+\infty)$:

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)dx = \int_0^\infty e^{-(a+1)x} = \frac{1}{a+1}.$$

Snadnou integrací pak dostaneme, že pro nějakou konstantu c musí platit $F(a) = \ln(a+1) + c$. Konstantu c určíme dosazením již povědomé hodnoty $a = 0$:

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^0}{xe^x} dx = 0,\ \ln(0+1) = 0,$$

a proto $c = 0$ a závěrem $\boxed{F(a) = \ln(a+1)}$ pro $a \in (-1,+\infty)$.

Lukáš Krump, 22.12.2021