Domácí úkol č. 3 – Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (2 body) Spočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{x \cdot \ln x}{1-x} dx.$$

Návod: rozveďte integrand v řadu (pomocí známého rozvoje funkce $\frac{1}{1-x}$), integrujte jednotlivé sčítance a zdůvodněte záměnu integrálu a řady.

Použijeme rozvoj

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;\ x \in (-1, 1),$$

tedy

$$\frac{x \cdot \ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \ln x$$

a budeme chtít použít rovnost

$$\int_0^1 \frac{x \cdot \ln x}{1-x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \ln x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{n+1} \ln x dx.$$

Její platnost dokážeme pomocí Leviho věty pro řady: na intervalu $(0, 1)$ mají všechny sčítance stejné znaménko, jsou měřitelné a částečné součty jsou majorizovány absolutní hodnotou součtu celé řady, tedy funkcí $\frac{x \cdot \ln x}{x-1}$. Tato funkce je na $(0, 1)$ spojitá a omezená, jelikož má v 0 i v 1 konečné limity, a proto je na tomto intervalu integrovatelná. Proto můžeme zaměnit sumu a integrál.

Nyní tedy můžeme spočítat metodou per partes

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{n+1} \ln x dx &= \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \ln x\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{n+2} \frac{1}{x} dx = \\ &= 0 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+2} dx = -\left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}\right]_{x=0}^1 = -\frac{1}{(n+2)^2}\end{aligned}$$

Nyní použijeme známou sumu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a náš integrál je tedy roven

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \boxed{1 - \frac{\pi^2}{6}}$$

2. (2 body) Spočtěte plošný obsah množiny M v rovině omezené křivkou

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),\ a>0.$$

I pokud si neumíme křivku zatím představit, můžeme snadno odvodit, že pro body na ní platí $|x| > |y|$ a že je souměrná podle každé ze souřadných os. Plošný obsah celé množiny bude tedy dvojnásobkem obsahu poloviny množiny M, která leží napravo od osy y – nazvěme tuto polovinu M'. Díky $|x| > |y|$ lze M' parametrizovat polárními souřadnicemi s úhlem $\varphi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Pro každý takový úhel pak potřebujeme určit meze parametru r. Přepišme proto zadání křivky do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} r^4 &= 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ r^2 &= 2a^2(\cos 2\varphi) \end{aligned}$$

Proto budou meze pro r vždy $(0, \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi})$. Polární souřadnice mají $|J_\Phi| = r$ a proto

$$\begin{aligned} \lambda_2(M') &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi \\ &= a^2\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \end{aligned}$$

Tedy $\lambda_2(M) = \boxed{2a^2}$.

Křivka se nazývá (Bernoulliho) lemniskáta a obrázek a další její vlastnosti najdete třeba zde.

Lukáš Krump, 8.12.2021