Matematika pro fyziky NOFY161, ZS 21/22, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 2 – Řešení.

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (1 bod) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}$$

na $\langle 0, 1\rangle$.

Posloupnost lze napsat jako $f_n(x) = x^n(1-x^n)$, takže zřejmě konverguje bodově k nule v celém $\langle 0, 1\rangle$. Vyšetřujeme tedy stejnoměrnou konvergenci v tomto intervalu, zkusíme vyšetřit průběh funkce $f_n(x)$.

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n),$$

takže $f_n'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, tuto poslední hodnotu označme x_n, přitom $f(0) = 0$ a $f(x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Vidíme tedy, že pro $n \to \infty$ neplatí $f_n(x_n) \to 0$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\langle 0,1\rangle} f_n \neq 0$ a proto nejde o stejnoměrnou konvergenci na $\langle 0, 1\rangle$. Protože přitom $x_n \to 1$, tušíme, že bude „problém u jedničky“.

Z tvaru derivace také snadno vidíme, že $f_n'(x) > 0$ v $(0, x_n)$ a $f_n'(x) < 0$ v $(x_n, 1)$, tedy f_n roste v $(0, x_n)$, a proto pro libovolné $a \in (0, 1)$ pro dost velká n platí $0 < f_n(x) < f_n(a) \to 0$ pro všechna $x \in \langle 0, a\rangle$, takže $f_n(x)$ jde k 0 stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a\rangle$ a tedy lokálně stejnoměrně v $\langle 0, 1)$.

2. (1,5 bodu) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$$

a sice (a) na $(0, \varepsilon)$, (b) na $(\varepsilon, +\infty)$.

Snadno vidíme (třeba substitucí $y = \frac{x}{n}$), že pro každé $x > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Pro vyšetření stejnoměrné konvergence nejprve zderivujeme:

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}(\ln \frac{x}{n} + 1),$$

nulové body derivace jsou $x_n = \frac{n}{e}$, hodnoty v nich jsou $f_n(x_n) = -\frac{1}{e}$.

Dále $\lim\limits_{x\to 0+} f_n(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, $f_n(n) = 0$, funkce f_n klesá v $(0, x_n)$ a roste v $(x_n, +\infty)$. Pro každý interval tvaru $(0, \varepsilon)$ stačí vzít $n > \varepsilon e$, pak f_n klesá v celém intervalu $(0,\varepsilon)$, proto pro každé $x \in (0,\varepsilon)$ je $0 > f_n(x) > f_n(\varepsilon) \to 0$, posloupnost zde tedy konverguje stejnoměrně.

Na intervalech tvaru $(\varepsilon,+\infty)$ jsou suprema f_n nekonečná a zároveň pro všechna $n > \varepsilon e$ je $\inf\limits_{(\varepsilon,+\infty)} f_n = -\frac{1}{e}$, posloupnost zde tedy stejnoměrně nekonverguje. Na intervalech tvaru (ε,a) už ale bude konvergence stejnoměrná: stačí zvolit $n > ae$, potom víme (podobně jako v předchozí části), že f_n klesá na (ε,a), a pro všechna $x \in (\varepsilon,a)$ je $0 > f_n(x) > f_n(a) \to 0$. Konvergence je tedy stejnoměrná na (ε,a) (pro libovolná $\varepsilon < a \in \mathbb{R}$) a lokálně stejnoměrná na $(\varepsilon,+\infty)$.

3. (1,5 bodu) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot e^{-nx}$$

v $\mathbb{R}$.

Označme n-tý člen sumy $f_n(x)$. Snadno vidíme, že $\frac{n-2}{n+2} \to 1$ (zřejmě i monotonně – využijeme později), takže limita

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot e^{-nx} = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

(exponenciála převáží mocninu), takže pro $x < 0$ není splněna nutná podmínka konvergence řady. Vyšetřujeme tedy dále jen pro $x \geq 0$. Díky již zmíněné monotonní konvergenci $\frac{n-2}{n+2} \to 1$ podle „stejnoměrného Abelova kritéria“ konverguje $\sum f_n(x)$ stejnoměrně, pokud totéž platí pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot e^{-nx}.$$

Zde použijeme „stejnoměrné Leibnizovo kritérium“, stačí tedy ukázat, že $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot e^{-nx}$ jde k nule monotonně (pro $n \to \infty$) a stejnoměrně. Monotonie je snadno vidět (jedná se o součin dvou kladných klesajících posloupností) a stejnoměrnost je vidět z toho, že pro každé $x \geq 0$ je $g_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, což je konvergentní majoranta.

Závěr tedy zní, že tato řada konverguje stejnoměrně na $\langle 0,+\infty)$ a diverguje na $\mathbb{R}_-$.