Matematika pro fyziky NOFY161, ZS 21/22, Cvičení s L. Krumpem

Domácí úkol č. 1, Řešení

Všechny kroky řádně zdůvodněte.

1. (1 bod) Spočtěte první a druhý Gâteauxův diferenciál funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 x^2 \sin \pi y + (y')^3 + y''y''' + ye^{-(y'')^2} dx$$

na $C^3(\langle 0, 1\rangle)$.

Pokud to dokážeme, můžeme psát diferenciály z hlavy, bez počítání limit. Využíváme přitom:

- u funkcionálů zadaných integrálem se diferencování projeví pouze na integrandech,
- integrandy derivujeme „jako normální funkce“ s tím, že nederivujeme podle x (to zde vystupuje jako konstanta), ale zároveň podle funkcí $y, y', y'', \ldots$,
- derivací y ve směru h je h, derivací y' ve směru h je h', atd.,
- jinak platí všechna běžná pravidla derivování (Leibniz, složená funkce),
- při vyšších derivacích se s h už nic neděje (chová se jako konstanta), druhé derivování ve směru k způsobí, že roli h převezme k atd.

Proto

$$\delta F(y; h) = \int_0^1 x^2 \pi \cos \pi y \cdot h + 3(y')^2 h' + h''y''' + y''h''' + he^{-(y'')^2} + ye^{-(y'')^2}(-2y''h'')dx$$

$$\begin{aligned}\delta^2 F(y; h, k) = \int_0^1 & -x^2\pi^2 \sin \pi y \cdot hk + 6y'h'k' + h''k''' + k''h'''+ \\ & + he^{-(y'')^2}(-2y''k'') - 2h''(ky''e^{-(y'')^2} + yk''e^{-(y'')^2} + yy''e^{-(y'')} \cdot (-2y''k''))dx\end{aligned}$$

2. (1,5 bodu) Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 (y')^4 - 6(y')^2 dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle 0, 1\rangle);\ y(0) = 0,\ y(1) = A\}$$

pro nějaké číslo $A \in \mathbb{R}, |A| \neq 1$.

Pro funkci $f(x,y,z) = z^4 - 6z^2$ máme $f_y = 0,\ f_z = 4(z^3 - 3z)$ a sestavíme EL rovnici

$$0 - 4((y')^3 - 3(y'))' = 0$$
$$(y')^3 - 3(y') = c,\ c \in \mathbb{R}$$

Pokud se na poslední řádek díváme jako na kubickou rovnici $z^3 - 3z = c$, je jasné, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ má jedno až tři řešení. Tedy funkce y'může v $\mathbb{R}$ nabývat nejvýše tří hodnot. Předpokládáme však, že y' je definovaná a spojitá v celém intervalu $\langle 0,1\rangle$, takže nabývá jen **jediné** takové hodnoty, jinými slovy y' je konstantní v $\langle 0,1\rangle$, a tedy $y = k.x + l$.

Z okrajových podmínek pak ihned vidíme, že $k = A, l = 0$ a tedy extremála je $y = Ax$.

Dále zkusíme ověřit konvexitu/konkavitu pomocí Hessovy matice:

$$H_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12z^2 - 12 \end{pmatrix},$$

dosadíme $z = y' = A$ a vidíme, že pro $|A| > 1$ je H_g pozitivně semidefinitní a jedná se tedy o bod minima, podobně pro $|A| < 1$ je H_g negativně semidefinitní a jedná se tedy o bod maxima.

Pokud někdo z vás neurčil správně semidefinitnost matice H_g, mohli jste použít i Jacobiho větu, jen upozorňuju na nutnost ověřit podmínku $P(x) > 0$, která vede na minimum, resp. $P(x) < 0$, která vede na maximum.

Pozor, v určování definitnosti matic jste často chybovali. Připomeňme, že matice (v diagonálním tvaru) je pozitivně semidefinitní, pokud má na diagonále jen kladná čísla a aspoň jednu nulu; analogicky pro negativně semidefinitní. Naproti tomu indefinitní matice tam má aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné číslo (a libovolný počet nul). V našem kontextu semidefinitnost stačí pro konvexitu/konkavitu, pouze indefinitnost (anebo nulová matice) znamená, že konvexitu nelze určit.

Mimochodem pro $|A| = 1$ (mimo zadání) nejde konvexita použít (H_g je nulová), proto sestavíme Jacobiho rovnici, ta bude ovšem

$$-(0h')' + 0h = 0,$$

takže jejím řešením jsou všechny funkce $h \in C^1(\langle 0,1\rangle)$, takže jistě existují konjugované body v celém intervalu a $y = Ax$ není bodem maxima ani minima.

3. (1,5 bodu) Vyšetřete extrémy funkcionálu

$$F(y) = \int_1^2 x(y')^4 - 2y(y')^3 dx$$

na množině

$$M = \{y \in C^1(\langle 1,2\rangle);\ y(1) = 0,\ y(2) = 1\}$$

Pro funkci $f(x,y,z) = xz^4 - 2yz^3$ máme $f_y = -2z^3,\ f_z = 4xz^3 - 6yz^2$ a sestavíme EL rovnici

$$-2(y')^3 - (4x(y')^3 - 6y(y')^2)' = 0.$$

Tentokrát potřebujeme používat y'' a tedy musíme ověřit předpoklady věty o regularitě minimizéru. Zjišťujeme platnost podmínky

$$f_{zz} = 12xz^2 - 12yz = 12z(xz - y) \neq 0$$

na množině M. K tomu jednak nesmí platit $z = y' = 0$, tedy y nesmí být konstatní, což díky okrajovým podmínkám opravdu není. Za druhé musíme vyloučit

$$\begin{aligned} xy' - y &= 0 \\ xy' &= y \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} \\ \ln y &= \ln x + c \\ y &= kx \end{aligned}$$

a toto opět díky okrajovým podmínkám opět být splněno nemůže. Předpoklady věty o regularitě minimizéru jsou tedy splněny.

Můžeme tedy EL rovnici upravit na

$$\begin{aligned} -2(y')^3 - (4(1(y')^3 + x \cdot 3(y')^2 y'') - 6(y'(y')^2 + y \cdot 2y'y'')) &= 0 \\ -12x(y')^2 y'' + 12(yy'y'')) &= 0 \\ 12y'y''(-xy' + y)) &= 0 \end{aligned}$$

Díky úvahám v předchozím odstavci víme, že $y' \neq 0$ a také $-xy' + y \neq 0$. Nutně tedy musí platit $y' = 0$, tedy extremála y je lineární funkce a z okrajových podmínek zjistíme, že to je $y = x - 1$.

Dále sestavíme Hessovu matici a dosadíme do ní naši extremálu:

$$H_g = \begin{pmatrix} 0 & -6z^2 \\ -6z^2 & 12z(xz - y) \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2(x - (x-1)) \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je bohužel indefinitní, takže zatím nevíme nic a jdeme sestavovat Jacobiho rovnici: $P(x) = 2, Q(x) = 0 - (-1)' = 0$, takže Jacobiho rovnice je

$$(-2h')' + 0 = 0$$

a jejími řešeními jsou tedy lineární funkce $h(x) = cx + d$. Nyní se ptáme, zda existuje takové netriviální řešení h splňující $h(1) = h(x) = 0$ pro nějaký konjugovaný bod $x \neq 1$. To však zřejmě neexistuje, protože jediná taková lineární funkce by musela být nulová. Konjugované body tedy neexistují a díky podmínce $P(x) = 2 > 0$ je naše extremála $y = x - 1$ bodem minima.

Lukáš Krump, 6.11.2021