Sada příkladů 1/11

# Taylorův polynom

1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.
2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.
3. Spočtěte přibližně $\sqrt[5]{250}$.
4. Spočtěte přibližně $\arcsin 0,45$.
5. Energie volné částice je v teorii relativity dána vztahem $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Ukažte, že pro $v \ll c$ představuje veličina $T = E - m_0 c^2$ kinetickou energii newtonovské mechaniky.

   Použitím Taylorova rozvoje spočtěte limity

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

**NMAF051** | 13. (poslední) cvičení 8.1.2018

- Ke zkouškám – opravené zápočtové písemky
  – vzorové zkouškové písemky
  – zápočty → středa?
  – průběh zkoušek

**Taylorův polynom** ⇝ aproximace diferencovatelných funkcí pomocí polynomů

Def $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0,\ f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ … Taylorův polynom stupně $n$ v bodě $x_0$

Peanova věta: … $\exists!$ polynom $Q_n$, že $f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n)$

$Q_n = P_n \leftarrow$ Taylor

Úloha 6.8.6.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \lim\Big(\frac12 + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\Big) = \frac12$$

$$e^x = P_2(x) + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Úloha 6.8.8
$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp x^2 - \exp\frac{x^4}{2} - x^2}{x^6}$$

$$\exp t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$
$$\exp x^2 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$
$$\exp\frac{x^4}{2} = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{8} + o(x^8)$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}+\cancel{\frac{x^4}{2}}+\frac{x^6}{6}+o(x^6) - \big(\cancel{1}+\cancel{\frac{x^4}{2}}+\frac{x^8}{8}+o(x^8)\big) - \cancel{x^2}}{x^6} = \frac16$$

$e^x$ v $x=0$

$\cancel{(e^x)^{(k)}(0)}$

$\exp^{(k)}(0) = \exp 0 = 1$

$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\quad \forall n\in\mathbb{N}_0$

Věta 6.8.10 … Odhad chyby Taylorova polynomu

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0<x,\ n\in\mathbb{N}$, $f$ má na $[x_0,x]$ spojitou $f^{(n)}$ ~~[illegible]~~, na $(x_0,x)$ má $f^{(n+1)}$

Nechť $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ má v $(x_0,x)$ $\varphi'\neq 0$ vlastní, $\varphi$ spojitá na $[x_0,x]$

Pak $\exists\ \xi\in(x_0,x)$, že $R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(x)}\,f^{(n+1)}(\xi)$

- Spec. $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ … $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Lagrange
- $\varphi(t) = t$ … $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$

$\theta := \frac{\xi-x_0}{x-x_0}\in(0,1)$ Cauchy

**Úloha 6.8.12** Numericky aproximujte $e^2$ s přesností $10^{-2}$. ②

Taylor s $x_0 = 0$

$$P_n(2) = \frac{e^0}{0!}2^0 + \frac{e^0}{1!}2^1 + \frac{e^0}{2!}2^2 + \dots + \frac{e^0}{n!}2^n = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}$$

Zbývá určit $n$ tak, abychom dosáhli dané přesnosti.

Lagrangeův tvar zbytku: $\exists\, \xi \in (0,2)$ takové, že

$$R_{n+1}(2) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}2^{n+1} \le \frac{9}{(n+1)!}2^{n+1}$$

$$\hookrightarrow e^\xi < 3^2 \quad (\xi \in (0,2))$$

$$n = 9 \Rightarrow |R_{10}(2)| \le \frac{9}{10!}2^{10} = \frac{\cancel{3\cdot 3}\cdot\cancel{2^{10}}\, 2^2}{1\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot(\cancel{2\cdot 2})\cdot 5\cdot(3\cdot\cancel{2})\cdot 7\cdot(\cancel{2\cdot 2\cdot 2})\cdot\cancel{3\cdot 3}\cdot\cancel{2}\cdot 5} = \frac{4}{3\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 5} < \frac{1}{100}$$

$$\longrightarrow P_9(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{9!}$$

$$\doteq 7.3887$$

**Věta 6.8.16** Základní Taylorovy rozvoje v počátku $(x=0)$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{6!} + o(x^4)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^8)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

↳ zobecněná kombinační čísla

## Newtonův a Riemannův integrál

- Určitý integrál .. výpočet plochy pod křivkou
- $F : x \to \int_a^x f(t)\,dt$ splňuje $F'(x) = f(x)$
- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ $\forall$ prim. fci $F$ k $f$ ... Newton-Leibniz

<u>Def</u>
- dělení intervalu
- dolní a horní suma
- dolní a horní integrál
- zjemnění
- Riemannovsky integrovatelná funkce

<u>Def 7.1.1</u> Zobecněná prim. funkce

$f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $(a,b) \subset \mathbb{R}$

$F$ je zobecněnou primitivní funkcí k $f$ na $(a,b)$ if:

(i) $F$ spojitá na $(a,b)$

(ii) $F' = f$ na $(a,b) \setminus K$, kde $K \subset (a,b)$ splňuje $K \cap [-n,n]$ je konečná každé $n \in \mathbb{N}$

Př $F(x) = |x|$ <u>je zobec. prim. fce</u> k $\operatorname{sign}(x)$ ale <u>není prim. fce</u> ($F'(0)$ neexistuje)

<u>Vyšíral 9</u>

$\boxed{P1|11}$

(1) $f(x) = e^{2x-x^2} \quad \to$ Taylor 3. stupně v $x=0$

$$f = e^{2x}e^{-x^2} \qquad e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + o(x^6) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

$$\to e^{2x-x^2} = 1 + 2x + (2x^2 - x^2) + \left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^3\right) + o(x^4)$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

(2) $f(x) = \sqrt{x} \qquad f(1) = 1 \qquad P_3(x) = 1 + \frac{x-1}{2 \cdot 1!} - \frac{(x-1)^2}{4 \cdot 2!} + \frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3!}$

$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f'(1) = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16}$

$f'' = -\frac{1}{4x^{3/2}} \qquad f''(1) = -\frac{1}{4}$

$f''' = +\frac{3}{8}\frac{1}{x^{5/2}} \qquad f'''(1) = +\frac{3}{8}$

(6) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^6) - \left[\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{8} + o(x^6)\right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^6)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12} + o(x^2)\right) = \underline{-\frac{1}{12}}$$

(7) $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \text{v } x=0: \quad 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + \frac{x^3}{3!}\ln^3 a + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \cancel{1} + \cancel{x\ln a} + \frac{x^2}{2}\ln^2 a + \frac{x^3}{6}\ln^3 a + \underline{o(x^3)} + \cancel{1} - \cancel{x\ln a} + \frac{x^2}{2}\ln^2 a - \frac{x^3}{6}\ln^3 a + o(x^3) - \cancel{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln^2 a + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\ln^2 a + o(x)\right) = \underline{\ln^2 a}$$

(8) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} = \lim \frac{\left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right] - x^2 - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{x^2} + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4) - \cancel{x^2} - \cancel{x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + o(x)\right) = \underline{\frac{1}{3}}$$

Sada příkladů 1/11 – Taylorův polynom

(1) Taylor stupně 3 v bodě 0 $\quad f(x) = e^{2x-x^2} \Rightarrow f(0) = 1$

$$f'(x) = e^{2x-x^2}(2-2x) \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$f''(x) = e^{2x-x^2}(2-2x)^2 + e^{2x-x^2}(-2) \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = e^{2x-x^2}(2-2x)^3 + e^{2x-x^2}\,2(2-2x)(-2) + e^{2x-x^2}(2-2x)(-2)$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 8 - 8 - 4 = -4$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + 2x + \frac{2x^2}{2!} - \frac{4x^3}{3!} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$$

(2) Taylor stupně 3 v bodě 1 $\quad f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^{1/2} \qquad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \qquad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} \qquad f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} \qquad f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$x - x_0 = x - 1$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8}\frac{1}{3!}(x-1)^3$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{16}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right) + x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right) + x^2\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16}\right) + \frac{1}{16}x^3$$

$$= \frac{7}{16} + \frac{7}{16}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

• Jinak: $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{1 + (x-1)} = \left(1 + (x-1)\right)^{\frac{1}{2}}$

Obecná mocnina: $(1+y)^{\alpha} = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$

$$\Rightarrow P_3 = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3!}(x-1)^3$$

$$= 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16}$$

③ Spočtěte přiblížení $\sqrt[5]{250}$

$f(x) = x^{1/5}$ $\quad f(250) = ?$

$$\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{\frac{250}{3^5} 3^5} = 3\sqrt[5]{\frac{250}{243}} = 3\underbrace{\left(1 + \frac{7}{243}\right)}^{1/5}$$

$y(x) = (1+x)^{1/5}$ $\quad x = \frac{7}{243}$

$$\sqrt[5]{250} = \underbrace{3\left(1 + \frac{1}{5}\frac{7}{243} + \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{7}{243}\right)^2\right.} + \dots \Big)$$

$= 3.01708479$

Přesně: $3.01708816$

(4) Spočítejte přibližně $\arcsin(0.45)$

$$f(x) = \arcsin(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\arcsin(x) = \arcsin(x_0) + \arcsin'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\arcsin''(x_0)(x-x_0)^2 + R_3(x-x_0)$$

$$x_0 = 0.5 = \frac{1}{2} \quad \dots \quad x - x_0 = -0.05$$

$$\Rightarrow \arcsin(0.45) = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}(-0.05) + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3/2}}(0.05)^2 + R_3(x-x_0)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(-0.05) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}(0.05)^2 + R_3(x-x_0)$$

$$= 0.523595 - 0.057735 + 0.000562 + R_3(x-x_0)$$

$$= 0.466825 + R_3(x-x_0)$$

(přesně 0.466765)

$$R_3(x-x_0) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \quad \dots$$

(5) Teorie relativity, energie volné částice $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Ukažte, že pro $v \ll c$ je $T = E - m_0c^2$ kinetická energie Newt. mech.

$$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots \quad x = -\frac{v^2}{c^2} \qquad x \ll 1$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots$$

$$E = m_0c^2 f\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right)$$

$$E - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0v^2\underbrace{\frac{v^2}{c^2}}_{\ll 1} + \dots \approx \underline{\frac{1}{2}m_0v^2} \quad \checkmark$$

(6) Použitím Taylorova rozvoje spočtěte limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8} + \frac{o(x^5)}{x^4}\right) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{2}{24} = \underline{-\frac{1}{12}}$$

(7) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \qquad a \in \mathbb{R}^+ \qquad (a^x)' = \ln a \, a^x$$
$$(a^x)^{(k)} = (\ln a)^k a^x$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cancel{1} + \cancel{\ln a\, x} + (\ln a)^2\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(\cancel{1} - \cancel{\ln a\, x} + (\ln a)^2\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \cancel{2}}{x^2}$$

$$= \lim\left((\ln a)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + o(x^2)\right) = \underline{(\ln a)^2}$$

(8) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x + x^2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{(x - x^2)}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{3}}$$