Sada příkladů 2/13

Funkce více proměnných

Vázané extrémy

Nalezněte extrémy dané funkce vzhledem k vazbě

1. $xy; \quad x + y = 1$
2. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}; \quad x^2 + y^2 = 1$
3. $x^2 + y^2; \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
4. $x^m y^n z^p; \quad x + y + z = a, \qquad m,\ n,\ p,\ a > 0$
5. $\sin x \sin y \sin z; \quad x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \qquad x,\ y,\ z > 0$
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \qquad p > 1,\ a \geq 0.$

   Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce na uvedené množině
7. $x - 2y - 3; \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1$
8. $x^2 - xy + y^2; \quad |x| + |y| \leq 1$
9. $x^2 + y^2 - 12x + 16y; \quad x^2 + y^2 \leq 25$
10. $x + y + z; \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1.$
11. Při jakých rozměrech má kvádr daného objemu nejmenší povrch?
12. Do daného kužele vepište hranol o n-úhelníkové podstavě, který má maximální objem.
13. Najděte vzdálenost bodu (p, q, r) od roviny $ax + by + cz + d = 0$.
14. Najděte vzdálenost d dvou mimoběžek

$$\begin{array}{ll} x = X_1 + at & x = X_2 + pt \\ y = Y_1 + bt & y = Y_2 + qt \\ z = Z_1 + ct & z = Z_2 + rt\,. \end{array}$$

15. Pomocí hledání vázaných extrémů dokažte
a) AG nerovnost $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, $a_i \geq 0$
b) Hölderovu nerovnost $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n y_i^q)^{\frac{1}{q}}$, x_i, $y_i \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

16. V počátku kartézských souřadnic je umístěn bodový náboj Q.
a) Jaké bodové náboje Q_A, Q_B, Q_C musíme umístit do bodů $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$ $C = (0, 0, 4)$, aby náboj q v bodě $(1, 1, 1)$ byl v rovnováze.
b) Bude tato rovnováha stabilní?

Věta o regulárním zobrazení

17. Vyřešte rovnici $(z_y)^2 z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (z_x)^2 z_{yy} = 0$ tím, že položíte $x = u$, $y = v$, $z = w$ a přepíšete ji na rovnici pro funkci u proměnných v a w.

18. Vyjádřete první složku f_x vektoru $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ ve sférických souřadnicích $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$.

Přepište do nových proměnných

19. $x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$, $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

20. $z_{xx} + z_{yy} = 0$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$

21. $x^2 z_{xx} - (x^2 + y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$, $u = x + y$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Počty 2/13 – Vázané extrémy, regulární zobrazení

Úlohy 1–6: Nalezněte extrémy funkce vzhledem k vazbě

① $f(x,y) = xy$, vazba $x+y=1$

- → lze řešit jednoduše: z vazby $y = 1-x$

$\to f(x,y) \rightsquigarrow f(x) = x(1-x) = x - x^2$

$f'(x) = 1-2x$

$f'(x) = 0 \iff \underline{x = \frac{1}{2}}$ → maximum $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

- Lagrange multiplikátor: $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \ \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (1 \ 1)$ ... hodnost 1 ... ok ✓

$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x+y+1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y - \lambda \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x - \lambda \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad y = \lambda = x \rightsquigarrow = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x+y+1) \overset{!}{=} 0$$

② $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, vazba $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ ... rovina procházející $(0,0,0)$, extrémy na kružnici

$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ → $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \ \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x \ 2y)$ hodnost 1 pro $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{a} - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \quad \to x = \frac{1}{2\lambda a}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{b} - 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \quad \to y = \frac{1}{2\lambda b}$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2+y^2-1) \overset{!}{=} 0 \quad \to \frac{1}{4\lambda^2 a^2} + \frac{1}{4\lambda^2 b^2} = 1 \quad \to \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 4\lambda^2$

$\to \lambda = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \pm \frac{1}{2ab}\sqrt{a^2+b^2}$

$x = \frac{1}{2\lambda a} = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$y = \frac{1}{2\lambda b} = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$f(x,y) = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ ...
- $ab > 0$: $+$max $-$min
- $ab < 0$: $+$min $-$max

③ $f(x,y) = x^2+y^2$, vazba $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ... rotační paraboloid, extrém na přímce

$\downarrow$

$g(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

$\nabla g = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ hodnost 1 $(a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ ✓

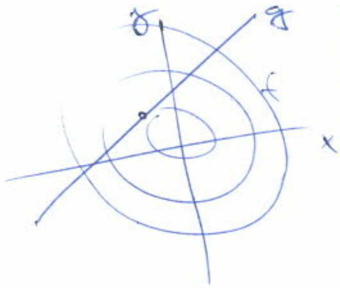
$$F(x,y,\lambda) = x^2+y^2 - \lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \frac{\lambda}{a} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\lambda}{2a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \frac{\lambda}{b} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{\lambda}{2b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right) \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\lambda}{2a^2} + \frac{\lambda}{2b^2} \rightarrow \lambda = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow \quad x &= \frac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y &= \frac{a^2b}{a^2+b^2} \end{aligned}\right\} \text{minimum}$$



$\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$

f spojitá

$\Rightarrow$ nabývá minima

- Alternativní řešení (bez Lagr. multipl.)

$x^2+y^2 \qquad bx+ay = ab \quad \rightarrow \quad y = b - \frac{b}{a}x$

$\hookrightarrow \quad x^2+y^2 = x^2 + b^2 - 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$

$$\tilde{f}(x) = b^2 - \frac{2b^2}{a}x + \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2$$

$$\tilde{f}'(x) = -\frac{2b^2}{a} + 2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\frac{\cancel{2}b^2}{\cancel{a}}}{\frac{\cancel{2}(a^2+b^2)}{\cancel{a^2}}} = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \text{ etc.}$$

④ $f(x,y,z) = x^m y^n z^p \quad m,n,p>0$, vazba $x+y+z=a \quad a>0$

$$\perp$$

$$g(x,y,z) = x+y+z-a$$

$$\nabla g = (1\ 1\ 1) \quad \text{hodnost} = 1 \ \checkmark$$

$$F(x,y,z,\lambda) = x^m y^n z^p - \lambda(x+y+z-a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m x^{m-1} y^n z^p - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad \to \quad \lambda x = m x^m y^n z^p$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = n x^m y^{n-1} z^p - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad\quad \lambda y = n x^m y^n z^p$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = p x^m y^n z^{p-1} - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad\quad \lambda z = p x^m y^n z^p$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x+y+z-a) \overset{!}{=} 0 \quad\quad \lambda\underbrace{(x+y+z)}_{a} = (m+n+p)\, x^m y^n z^p$$

Also: $\lambda = m \cancel{x}^{m-1} y^n z^p = n x^m y^{n-1} z^p = p x^m y^n z^{p-1} \to \quad myz = nxz = pxy$

$$\to \frac{m}{n} = \frac{x}{y} \quad \frac{n}{p} = \frac{y}{z} \quad \frac{p}{m} = \frac{z}{x}$$

$$\lambda a = (m+n+p)\, x^{\cancel{m}} \cancel{y^n} \cancel{z^p} = am \cancel{x^{m-1}} \cancel{y^n} \cancel{z^p} \quad \to \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{am}{m+n+p} \\ y &= \frac{an}{m+n+p} \\ z &= \frac{ap}{m+n+p} \end{aligned}\right\} \text{minimum}$$

- $\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty} f(\vec{x}) = \infty \to$ f nabývá minima $\longrightarrow$ v $(x,y,z) =$
  & f spojitá
  $$= \frac{a}{m+n+p}(m,n,p)$$

- Cvičení: Spočíst Hessovu matici (viz Kopáček) ... (resp. kvadratickou formu)

$$d^2 f(x,y,z)(dx,dy,dz) = \cancel{d^2 F(x,y,z)(dx,dy,dz) - \lambda d^2 g(x,y,z)(dx,dy,dz)})$$

$$= m(m-1)x^{m-2}y^n z^p (dx)^2 + n(n-1)x^m y^{n-2} z^p (dy)^2 + p(p-1)\, x^m y^n z^{p-2} (dz)^2$$

$$+ 2mn\, x^{m-1}y^{n-1}z^p\, dx\,dy + 2np\, x^m y^{n-1} z^{p-1}\, dy\,dz + 2mp\, x^{m-1} y^n z^{p-1}\, dx\,dy$$

& vazba: $dx+dy+dz = 0 \to dz = -dx-dy$ $\quad$ ↳ převést na □ ...

⑤ $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, vazba $x+y+z = \frac{\pi}{2}$, $x,y,z>0$

$\downarrow$

$g(x,y,z) = x+y+z-\frac{\pi}{2} = 0$

$\nabla g = (1\ 1\ 1)$ ... hodnost 1 ✓

$F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$

$0 \overset{!}{=} \frac{\partial F}{\partial x}$: $\cos x \sin y \sin z = \lambda$

$0 \overset{!}{=} \frac{\partial F}{\partial y}$: $\sin x \cos y \sin z = \lambda$

$0 \overset{!}{=} \frac{\partial F}{\partial z}$: $\sin x \sin y \cos z = \lambda$

$0 \overset{!}{=} \frac{\partial F}{\partial \lambda}$ $x+y+z = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\tan x = \tan y = \tan z$

$\rightarrow x = y + k\pi = z + l\pi \quad k,l \in \mathbb{Z}$

& $x,y,z > 0$ & $x+y+z = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x = y = z = \frac{\pi}{6}$ ... max or min ??

- V $(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ díky symetrii:
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{8}$
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$\rightarrow Hf\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$D_1 = -\frac{1}{8}$

$D_2 = \frac{1}{64}(1-9) = -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}$

$\underbrace{D_3 = \frac{1}{8^3}(-1 + 2\cdot 27 + 3\cdot 9) > 0}_{\text{indefinitní}}$

No jo, to nám ale nepomůže. Je třeba fixovat směr, neboť máme vazbu.

- Kvadratická forma: $d^2 f(x,y,z)(dx,dy,dz) = -\frac{1}{8}\left((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right) + \frac{3}{8}\cdot 2\,(dx\,dy + dy\,dz + dx\,dz)$

& vazba: $dg = dx + dy + dz = 0 \rightarrow dx = -dy - dz$

$d^2 f = -\frac{1}{8}\left\{(-dy-dz)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\right\} + \frac{3}{4}\left\{(-dy-dz)dy + (-dy-dz)dz + dy\,dz\right\}$

$= -\frac{2}{8}(dy)^2 - \frac{2}{8}(dz)^2 - \frac{2}{8}dy\,dz - \frac{3}{4}(dy)^2 - \frac{3}{4}(dz)^2 - \frac{3}{4}dy\,dz$ Maximum

$= -(dy)^2 - (dz)^2 - dy\,dz = \underbrace{-\frac{1}{2}(dy+dz)^2}_{\leq 0} \underbrace{-\frac{1}{2}(dy)^2}_{\leq 0} \underbrace{-\frac{1}{2}(dz)^2}_{\leq 0} < 0$ $\quad (dy)^2 + (dz)^2 > 0$

(6) $f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$, vazba $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ $p > 1,\ a \geq 0$

$\downarrow$

$g = \sum x_i - a$

$\nabla g = (\underbrace{1\ 1 \dots 1}_{n\times})$ … hodnost 1 ✓

$F(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x})$

$\frac{\partial F}{\partial x_j} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow p x_j^{p-1} = \lambda$ $\to$ $\to$ $\sum_{j=1}^{n} p x_j^{p-1} x_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda x_j = \lambda a$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \sum x_i = a$

$\sum_{j=1}^{n} p x_j^p = \lambda a$

$\downarrow$

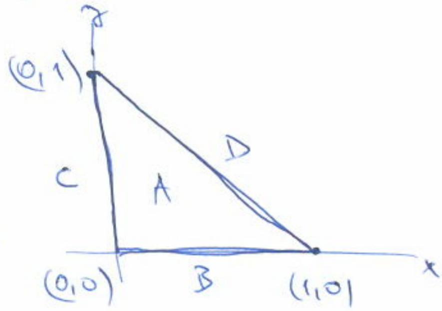
$\forall j\ p x_j^p = \lambda x_j$

Úloha 7 – 10: Nalezněte největší a nejmenší hodnotu fce na uvedené množině

(7) $f(x,y) = x - 2y - 3$ na množině $0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1$

$0 \le x+y \le 1$



f spojitá na omezené uzavřené množině → nabývá max a min

A – vnitřní množiny

$\nabla f = (1,-2)$ ... nemůže se nulovat

B – hrana $y=0$, $0 < x < 1$: $f_B(x) = f(x,0) = x-3$ $\quad f_B' = 1$ ... není extrém

C – hrana $x=0$, $0 < y < 1$: $f_C(y) = f(0,y) = -2y-3$ $\quad f_C' = -2$ ... není extrém

D – hrana $y = 1-x$, $0 < x < 1$: $f_D(x) = f(x,1-x) = x - 2(1-x) - 3 = -x-5$

$f_D' = -1$ ... není extrém

⇒ Extrémy musí být ve vrcholech:

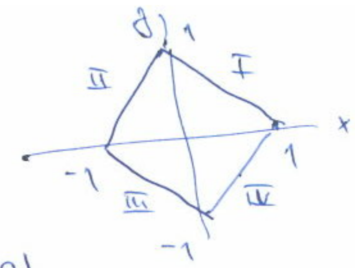
$f(0,0) = -3$

$f(1,0) = -2$ → glob. max. v $(1,0)$

$f(0,1) = -5$ → glob. min. v $(0,1)$

(8) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, ~~[illegible]~~ množina $|x| + |y| \le 1$

$\to$ f nabývá max, min.



• Uvnitř: $\nabla f = (2x-y,\ 2y-x) = (0,0) \iff (x,y) = \underline{(0,0)}$

Podezřelý bod: $f(0,0) = 0$

$\to$ Hranice = hrany + vrcholy

• Na hranách

I. $y = 1-x \to f_I = f(x, 1-x) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = x^2 - x + x^2 + 1 - 2x + x^2$

$$= 3x^2 - 3x + 1$$

$$f_I' = 6x - 3 \stackrel{!}{=} 0 \iff x = \frac{1}{2} \qquad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

II. $y = 1+x \to f_{II} = f(x, 1+x) = x^2 - x(1+x) + (1+x)^2 = \cancel{x^2} - x - \cancel{x^2} + 1 + 2x + \underline{x^2}$

$$= x^2 + x + 1$$

$$f_{II}' = 2x + 1 \stackrel{!}{=} 0 \iff f_{II} = -\frac{1}{2} \qquad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

III. $f(-x,-y) = f(x,y)$ ... jako I ... $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

IV. ... jako II ... $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

• Ve vrcholech

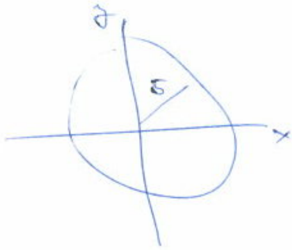
$f(1,0) = \underline{1} = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1)$

$\to$ Glob. min. $f(0,0) = 0$

~~Glob. max. $f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$~~

Glob. max $f(1,0) = f(0,1) = f(-1,0) = f(0,-1) = 1$

9) $f(x,y) = x^2+y^2-12x+16y$, množina $x^2+y^2 \le 25$



• Uvnitř: $\nabla f = (2x-12,\ 2y+16) \overset{!}{=} (0,0)$

$\Leftrightarrow (x,y) = \underbrace{(6,-8)}$

↳ Ale to není uvnitř množiny X

• Na hranici: $f(x,y)$ a vazba $g(x,y) = x^2+y^2-25 = 0$

$F = f - \lambda g$

$\nabla g = (2x, 2y)$ ... hodnost 1 pro $(x,y) \neq \underbrace{(0,0)}$

Tohle není na hranici, tedy ok ✓

$$\nabla F(x,y,\lambda) = (2x-12-2\lambda x,\ 2y+16-2\lambda y,\ x^2+y^2-25) \overset{!}{=} (0,0,0)$$

$\rightarrow 2x(1-\lambda) = 12 \quad |^2 \qquad \rightarrow x = \frac{6}{1-\lambda}$

$2y(1-\lambda) = -16 \quad |^2 \qquad \rightarrow y = \frac{-8}{1-\lambda}$

$\underbrace{(x^2+y^2)}_{25}(1-\lambda)^2 = 100$

$(1-\lambda)^2 = 4$

$(1-\lambda) = \pm 2$

$\lambda = \mp 2 + 1 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

	$\lambda = 3$	$\lambda = -1$
x	-3	3
y	4	-4

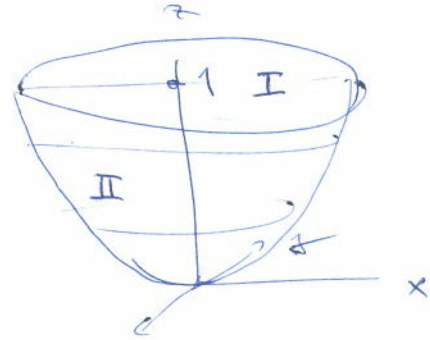
$f(-3,4) = 9+16+36+64 = 125$ ... glob. max

$f(3,-4) = 9+16-36-64 = -75$ ... glob. min

• Zlepšení: $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2}_{=25 \text{ (na hranici)}} - 12x + 16x = \underbrace{25 - 12x + 16y \quad \& \quad x^2+y^2 = 25}$

Jednodušší počítání, stejný výsledek.

(10) $f(x,y,z) = x+y+z$, množina $x^2+y^2 \le z \le 1$



• Uvnitř: $f(x,y,z)$ lineární v $x,y,z \Rightarrow$ extrém jen na hranici

• Hranice: vazby $g_1 = z-1 = 0$ ... poklop

$g_2 = x^2+y^2-z = 0$ ... plášť paraboloidu

→ Poklop: $f_I(x,y) = f(x,y,1) = x+y+1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le 1$

Lagrange: $\left.\begin{array}{l} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \end{array}\right\}$ $x=y \quad \& \quad 2x^2=1 \Rightarrow x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) = 1+\sqrt{2}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) = 1-\sqrt{2}$

→ Plášť paraboloidu: $f_{II}(x,y) = f(x,y,x^2+y^2) = x^2+y^2+x+y \quad \& \quad x^2+y^2<1$

$\nabla f_{II} = (2x+1, 2y+1) \overset{!}{=} (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

→ Glob max $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right) = 1+\sqrt{2}$

Glob min $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$