Sada příkladů 2/9

Metrické prostory

Stefan Banach a jedna z jeho vět

1. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = \kappa$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

2. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

3. Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s y(s)\,\mathrm{d}s + x.$$

Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje. Srovnejte toto řešení s přesných řešením, které lze hledat ve tvaru $y(x) = \alpha x^2 + x$.

4. Dokažte: pro každé $0 \le a \le 1$ konverguje posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$

k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).

Funkce více proměnných

Limita a spojitost funkcí více proměnných

Spočtěte následující limity

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$

6. $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6+y^6}{x^2-y^2}$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$

11. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

platí

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

neexistuje.

12. Ukažte, že pro funkci

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limity

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \text{ a } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

neexistují, ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\, x.y\neq 0} f(x,y) = 0.$$

Banachova věta o kontrakci

Def (kontraktivní zobrazení).
Buď (P,ρ) metrický prostor a $T: P \to P$ zobrazení definované na celém P.
Řekneme, že T je kontraktivní zobrazení (kontrakce), jestliže $\exists\ q \in [1,0)$ tak, že $\rho(Tx,Ty) \le q\,\rho(x,y) \quad \forall x,y \in P$.
Bod x_0 se nazývá pevný bod zobrazení T, jestliže $Tx_0 = x_0$.

Věta (Banachova o kontrakci)
Buď (P,ρ) metrický prostor a $T: P \to P$ kontraktivní zobrazení definované na celém P.
Pak má právě jeden pevný bod.
Dokonce pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ splňující $x_{n+1} = Tx_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (a x_1 je libovolné) platí $x_n \to x_0$, kde x_0 je zmíněný pevný bod zobrazení T.

Pokračování – Metrické prostory – Stefan Banach a věta

A) Metodou postupných aproximací nalezněte řešení rovnice $y' = ay$, $y(0) = K$. Ověřte na základě Banachovy věty, že metoda postupných aproximací na vhodném prostoru konverguje.

- $y' = ay$, $y(0) = K$

Nejprve vyřešme: $y' - ay = 0 \quad | \, e^{-ax}$

$$(y e^{-ax})' = 0 \Rightarrow y = Ce^{ax} \quad \& \quad y(0) = K$$

$$\Rightarrow \underline{y = Ke^{ax}}$$

- Metoda postupných aproximací

$y' = ay \rightarrow$ přepíšeme: $y(x) = \underbrace{y(0)}_{K} + \int_0^x \underbrace{y'(u)}_{ay(u)}\,du = K + a\int_0^x y(u)\,du$

Definujme $y_{n+1} = T(y_n)$, kde $T(y) := K + a\int_0^x y(u)\,du$

Tedy: $y_0 \overset{def}{=} 0$

$$y_1 = K$$

$$y_2 = K + a\int_0^x K\,du = K + Kax = K(1+ax)$$

$$y_3 = K + a\int_0^x K(1+au)\,du = K\left(1 + ax + \frac{a^2x^2}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = K\left(1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + \dots + \frac{a^n x^n}{n!}\right)$$

$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} Ke^{ax} \quad ✓$$

Banach, kontrakce?

$y \in C([0,x]) \Rightarrow y \in C^1([0,x]) \Rightarrow$ uvažujme tedy $(P,\rho) = (C([0,x]), \text{max metrika})$

$\rightarrow$ Zkoumejme $\rho(T(y_1), T(y_2)) = \sup_{u\in[0,x]} |T(y_1)(u) - T(y_2)(u)|$

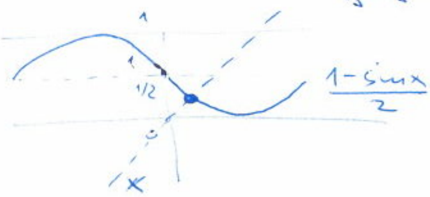
$$= \sup_{u\in[0,x]} \left| a \int_0^u (y_1(u') - y_2(u'))\,du' \right| \le |a| \sup_{u\in[0,x]} |y_1(x) - y_2(x)| \cdot x$$

$= |a|x\,\rho(y_1,y_2) \Rightarrow$ je-li $|a|x < 1 \Rightarrow T$ je kontrakce $\Rightarrow \exists!$ řešení

(+ můžeme prodlužovat po intervalech délky $\frac{1}{|a|+\varepsilon} \leftarrow \varepsilon > 0$)

② Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice $2x + \sin x = 1$. Ověřte, že na vhodném prostoru metoda konverguje.

- $2x + \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1 - \sin x}{2}$



Definujme $Tx = \dfrac{1 - \sin x}{2}$, pracujeme na $\mathbb{R}$ s $\rho(x,y) = |x-y|$ metrikou

Je kontrakce? $\rightsquigarrow$ $\underbrace{|Ty - Tx|}_{\rho(Ty,\,Tx)} = \frac{1}{2}|\sin x - \sin y| \underset{\text{Lagrangeova věta}}{=} \cancel{\cos} \frac{1}{2}\cos \xi\, |x-y| \leq \underbrace{\frac{|x-y|}{2}}_{\frac{1}{2}\rho(y,x)}$

✓ kontrakce

$\Rightarrow \exists!$ pevný bod Tx $\rightsquigarrow$ postupné aproximace ok

- $x_{n+1} = T(x_n)$

x_0	$= 0$	0
x_1	$= \frac{1}{2}$	0,5
x_2	$= \dfrac{1 - \sin \frac{1}{2}}{2}$	0.2603
x_3	$=$	0.3713
x_4		0.3186
x_5		0.3434
x_6		0.3317
$\vdots$		
x_{12}		0.3354 $\longleftarrow$ Wolfram: 0.335418... ✓

③ Metodou postupných aproximací nalezněte přibližné řešení rovnice

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 s\, y(s)\, ds + x$$

Ověřte na základě Banachovy věty... Přesné řešení ve tvaru: $y(x) = \alpha x^2 + x$

- Přesné řešení: $\alpha \cancel{x^2} + \cancel{x} = \frac{\cancel{x^2}}{2}\int_0^1 s(\alpha s^2 + s)\, ds + \cancel{x}$

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 s(\alpha s^2 + s)\, ds = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\alpha}{8} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{7}{8}\alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{21}$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = \frac{4}{21}x^2 + x}$$

- Postupné aproximace
  - Zobrazení: $T(y)(x) := x + \frac{x^2}{2}\int_0^1 s\, y(s)\, ds$
  - $y_0(x) = 0$
  - $y_1(x) = x + \frac{x^2}{2}\int_0^1 s \cdot \underbrace{0}_{y_0(s)}\, ds = \underline{x}$
  - $y_2(x) = x + \frac{x^2}{2}\int_0^1 s \cdot \underbrace{s}_{y_1(s)}\, ds = x + \frac{x^2}{2}\frac{1}{3} = \underline{x + \frac{1}{6}x^2}$
  - $y_3(x) = x + \frac{x^2}{2}\int_0^1 s\left(s + \frac{s^2}{6}\right) ds = x + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4\cdot 6}\right) = x + \frac{x^2}{2}\left(\frac{8+1}{24}\right)$
    $= x + \frac{x^2}{2}\frac{3}{8}$
    $= \underline{x + \frac{3}{16}x^2}$

  ⋮

- Banach a konvergence?

(7) Dokažte, $\forall\ 0 \le a \le 1$ konverguje posloupnost

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0$$

k hodnotě $\sqrt{a}$ (iterační metoda výpočtu odmocniny).

- Zobrazení: $T(x) := x - \frac{1}{2}(x^2 - a)$ & $x_{n+1} = T(x_n)$ & $x_0 = 0$

- je-li $\bar{x}$ pevný bod, $T(\bar{x}) = \bar{x} \iff \cancel{\bar{x}} = \cancel{\bar{x}} - \frac{1}{2}(\bar{x}^2 - a) \iff \underline{\sqrt{a} = \bar{x}}$ ✓

- Konverguje? Banach: Je-li T kontrakce $\Rightarrow$ konverguje, $\exists!$ pevný bod.

  - Definujme: $f(t) := t - \frac{1}{2}(t^2 - a)$ ... $\sqrt{a}$ je pevným bodem

    $\hookrightarrow f'(t) = 1 - t$

  Pro libovolné $x \in [0, \sqrt{a})$ máme, podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce,

  $$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = (1 - \xi)(x - a)$$

  Tedy, pro libovolné zafixované $\delta > 0$ je f kontrakcí na $[\delta, \sqrt{a}]$ a má jediný pevný bod $\sqrt{a}$.

  - $x_0 = 0$
  - $x_1 = a \in (0, \sqrt{a}) \to$ zafixujeme $\delta \in (0, x_1)$

    $\Rightarrow$ Banach na posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, úplný metrický prostor $\mathcal{C}([\delta, \sqrt{a}])$ a kontrakce f.

To bylo pro $a > 0$ $(a \in (0, 1])$

pro $a = 0$: $x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0 \to x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0 = \sqrt{0}$ ✓

Limita a spojitost zobrazení na metrických prostorech

Def (Limita zobrazení). (P_1,ρ_1) a (P_2,ρ_2) metrické prostory, $\varphi: P_1 \to P_2$, $x_0 \in P_1$ je hromadným bodem D_φ a $y_0 \in P_2$. Řekneme, že zobrazení φ má v bodě x_0 limitu y_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x \in P_\delta(x_0) \cap D_\varphi \Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(y_0)$$

Píšeme: $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$ nebo $\varphi(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$.

Def (Spojitost zobrazení) (P_1,ρ_1) a (P_2,ρ_2) metrické prostory, $\varphi: P_1 \to P_2$, $x_0 \in D_\varphi$.
Řekneme, že zobrazení φ je v bodě x_0 spojité, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap D_\varphi \Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\varphi(x_0)).$$

Věta (Heineho) (P_1,ρ_1) a (P_2,ρ_2) metrické prostory, $\varphi: P_1 \to P_2$, $x_0 \in P_1$ hromadným bodem D_φ a $y_0 \in P_2$. Pak

(i) $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0 \iff \forall \{x_n\} \subset D_\varphi \setminus \{x_0\}, x_n \to x_0$ platí $\varphi(x_n) \to y_0$.

(ii) $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) \ \exists \iff \forall \{x_n\} \subset D_\varphi \setminus \{x_0\}, x_n \to x_0$ existuje limita posloupnosti $\{\varphi(x_n)\}$

Věta (o B-C podmínce) (P_1,ρ_1) a (P_2,ρ_2) metrické prostory, (P_2,ρ_2) úplný, $\varphi: P_1 \to P_2$, x_0 je hromadným bodem D_φ. Pak

$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) \ \exists \iff \varphi$ splňuje B-C podmínku:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad x, y \in P_\delta(x_0) \cap D_\varphi \Rightarrow \rho_2(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon$$

Věta (o spojitosti slož. zobr.) (P_1,ρ_1), (P_2,ρ_2), (P_3,ρ_3) metrické prostory, $\varphi: P_1 \to P_2$, $\psi: P_2 \to P_3$.
Je-li φ spojité v x_0 a ψ spojité v $\varphi(x_0) \Rightarrow \psi \circ \varphi$ je spojité v x_0.

Věta (o limitě slož. zobr.) (P_1,ρ_1), (P_2,ρ_2), (P_3,ρ_3) metrické prostory, $\varphi: P_1 \to P_2$, $\psi: P_2 \to P_3$, $x_0 \in P_1$. Nechť $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0 \in P_2$, $\lim_{y\to y_0} \psi(y) = z_0 \in P_3$, x_0 je hromadným bodem $D_{\psi\circ\varphi}$ a je splněna alespoň jedna z podmínek:

(i) $\exists P_\delta(x_0)$, kde $\varphi(x) \neq y_0$ na $P_\delta(x_0)$

(ii) ψ je spojité v bodě y_0

Pak $\lim_{x\to x_0} (\psi\circ\varphi)(x) = z_0$.

Limita a spojitost funkcí více proměnných

(0) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y+1 = 1 \qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad f(x,y)=x+y+1$

Def: $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: (x,y)\in P_\delta(0,0) \overset{?}{\Rightarrow} x+y+1\in U_\varepsilon(1)$

Jakou metriku (normu) zvolit?

$|x-y|_1 = \sum_1^n |x_i-y_i|$

$|x-y|_2 = \sqrt{\sum_1^n |x_i-y_i|^2}$

$|x-y|_\infty = \max|x_i-y_i|$

$|(x,y)-(0,0)|<\delta \Rightarrow |x+y+1-1|<\varepsilon$

$|x|+|y|<\delta \Rightarrow |x+y|<\varepsilon$

$\delta > |x|+|y| \geq |x+y| \to \varepsilon=\delta$

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \lim_{r\to0+} (r^2)^{r^4(\cos^2\varphi\sin^2\varphi)} =$

- Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ } blížení po paprsku ... Libovolný úhel: $x=r\cos\varphi(r)$, $y=r\sin\varphi(r)$

$= \lim_{r\to0+} e^{r^4(\cos^2\varphi\sin^2\varphi)\ln r^2} = e^{\lim_{r\to0+} 2(r\ln r)\cdot r^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$

$\underbrace{r\ln r}_{\to 0}$, $\underbrace{r^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi}_{\to 0}$ nezávisle na φ!

$= e^0 = \underline{1}$

Kdyby závisela, lim by neexistovala

(Př) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to0+}\frac{r(\cos\varphi-\sin\varphi)}{r} = \cos\varphi-\sin\varphi$

závisí na φ → Limita neexistuje!

Vyhlídal 7-2

$(x-y)^2\geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow 0 \leq x^2y^2 \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2 \leq x^2+y^2 < 1$

pro $x^2+y^2<1$

$\Rightarrow 1 = (x^2+y^2)^0 \geq (x^2+y^2)^{x^2y^2} \geq (x^2+y^2)^{x^2+y^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{(x^2+y^2)} = \lim_{t\to0+} t^t = \lim e^{t\ln t} = e^0 = \underline{1}$

(6) $$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

• Zkusme opět polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \frac{r\left(\cos\varphi(r)+\sin\varphi(r)\right)}{r^2\left(\cos^2\varphi(r)-\sin\varphi(r)\cos\varphi(r)+\sin^2\varphi(r)\right)} = \frac{1}{r}\,\frac{\cos\varphi(r)+\sin\varphi(r)}{1-\frac{\sin 2\varphi(r)}{2}}$$

$$\Rightarrow\ 0 \le \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \le \frac{1}{r}\,\frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{r} \xrightarrow{r\to\infty} \underline{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$$

• Jinak: $$0 \le \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \left|\frac{x+y}{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+\underbrace{(x-y)^2}_{\ge 0}\right)}\right| \le 4\,\frac{\frac{x+y}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\le \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4}{\underbrace{\|(x,y)\|_2}_{\|(x,y)\|\to\infty}} \longrightarrow \underline{0}$$

$$\frac{x+y}{2} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

(7) $$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{r^4\left(\cos^4\varphi(r)+\sin^4\varphi(r)\right)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}\,\underbrace{\frac{1}{\cos^4\varphi(r)+\sin^4\varphi(r)}}_{\ge \frac{1}{2}\ \forall\varphi} = \underline{0}$$

$x = r\cos\varphi(r)$
$y = r\sin\varphi(r)$

↳ min? $0 = \frac{d}{d\varphi}\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right) = -4\cos^3\varphi\sin\varphi + 4\sin^3\varphi\cos\varphi$

$= 4\sin\varphi\cos\varphi\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right) = -4\sin\varphi\cos\varphi\left(\cos 2\varphi\right)$ ...

$= 0$ pro $\varphi = k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ...

↳ Range $[\frac{1}{2}, 1]$

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

$a=0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x\cdot 0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$

$a\neq 0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \underbrace{\dfrac{\sin(xy)}{x\cdot y}}_{\to 1,\ xy\to 0} \underbrace{y}_{\to a} = a$

$= \underline{a}$

(9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6+y^6}{x^2-y^2} = \lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{r^6(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)} = \lim\limits_{r\to 0+} r^4 \dfrac{\cos^6\varphi-\sin^6\varphi}{\cos(2\varphi)} =$

Zkusme polární

$= \begin{cases} 0 & \forall \varphi \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ \text{problém pro } \varphi = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} & (\cos 2\varphi = 0) \end{cases}$

Zkusme $y = x + x^5 = x(1+x^4)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6+(x(1+x^4))^6}{x^2-(x(1+x^4))^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6(1+(1+x^4)^6)}{x^2(\cancel{1}-(\cancel{1}+2x^4+x^8))} = \lim -\dfrac{x^6(1+(1+x^4)^6)}{2x^6+x^{10}} = -1$

A zkusme $y=0$, $x\to 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^6}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$ (Už víme z polárních souřadnic)

Vycházejí různé limity při různém přibližování do $(0,0)$ $\to$ <u>Limita neexistuje.</u>

(10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \overset{\text{polární}}{=} \lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\cancel{r^2}(\cancel{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi})} = \sin(2\varphi)$ ... závisí na φ

$\Downarrow$

<u>Limita neexistuje</u>

<u>Jiný příklad</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$ $\begin{cases} x=0: & -\infty \\ y=0: & +\infty \end{cases}$ $\times$ Limita neexistuje.

(11) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

platí $\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)} = \underbrace{\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)} = 0$, ale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje!

$x \neq 0$ a $\lim_{y\to 0} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\phi) = 0$ ✓

($x^2y^2 \to 0$; $x^2y^2 \to 0$, $(x-y)^2 \to x^2$)

Obdobně: $x \leftrightarrow y$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

na paprsku $y = x$: $= \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4} = 1$

na paprsku $y = 0$: $= \lim_{x\to 0} \dfrac{0}{0+x^2} = 0$

Limita neexistuje! $(x,y)\to(0,0)$

(12) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

limity $\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)}$ a $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ neexistují, ale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x}\cdot\left\{\underbrace{\lim_{y\to 0}\left(y\sin\frac{1}{y}\right)}_{=0} + x\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}}_{\text{Neexistuje!}}\right\}\right]$

Obdobně pro $x \leftrightarrow y$.

Ale $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$ ✓

$\left|(x+y)\underbrace{\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}}_{\text{omezené}}\right| \leq |x+y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$