Sada příkladů 2/8

Metrické prostory, topologie $\mathbb{R}^n$

1. Jako vzdálenost mezi dvěma místy na území ČR definujme jako a) vzdálenost na mapě b) nejkratší vzdálenost jízdy autem c) cena jízdenky ČD. Jde v těchto případech o metriku? (Pro případ b), c) ji chápeme pouze na takové podmnožině, kde má funkce vzdálenost smysl.)

2. Ověřte, zda následující množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ jsou metrické prostory.
   a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$
   b) Množina l_2 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$
   c) Množina l_∞ všech posloupností splňující $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\varrho(x,y) = \sum_n |x_n - y_n|$.

3. V $\mathbb{R}^2$ s obvyklou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí
   a)
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
   b) $f(x) = \mathrm{D}(x)$ (Dirichletova funkce).

4. Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin
   a) Množina všech racionálních čísel z intervalu $(0,1) \subset \mathbb{R}$
   b) Množina všech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících nerovnosti
$$x^2 + y^2 < 1, \quad y \geq 0$$
   c) Množina všech $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnosti
$$|z| < x^2 + y^2 \leq 1$$
   d) $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
   e) Jednotkový kruh se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

5. Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené
a) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost
$$x^2 + y^2 + z^2 > 1.$$
b) Množina všech $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících nerovnost
$$1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2.$$

6. Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t \in \mathbb{R}$)
$$M_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (|x| + |y|)e^{-(|x|+|y|)} \leq t\}.$$

7. Je množina
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 \leq xyz < 4\}$$
omezená?

8. Dokažte omezenost množiny
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

9. Dokažte souvislost množiny
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^4 + |\operatorname{arctg} x| + y^2 e^{|y|} = 2\}.$$

10. Nechť $A \subset X$. Dokažte, že $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

11. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^N$. Ukažte, že $(\partial A \times B) \cup (A \times \partial B) \subset \partial(A \times B)$. Kdy platí rovnost?

12. Nechť X, Y jsou metrické prostory (popř. $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^M$ pokud vám to pomůže pro lepší představu). Nechť $A, B \subset X$. Dokažte
(a) $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(b) $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$ (disjunktně)
(c) $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A
(d) $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina A
(e) $\operatorname{ext} A$ je největší otevřená množina disjunktní s A
(f) $x_0 \in \overline{A}$ právě když existují $x_n \in A$, $x_n \to x_0$
(g) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(h) Platí analogické tvrzení pro průnik?
(i) Je-li $F : X \to Y$ spojité, je $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Metrické prostory

Def: P množina. Zobrazení $\rho: P\times P \to [0,\infty)$ se nazývá metrika, jestliže: (i) $\rho(x,y)\geq 0$ a $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$

(iii) $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$

Potom se (P,ρ) nazývá metrický prostor

Def: Nechť V je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$ (či $\mathbb{C}$).
Zobrazení $\|\cdot\|: V\to [0,\infty)$ se nazývá norma, jestliže $\forall u,v\in V$ a $\lambda\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ splňuje: (i) $\|u\|\geq 0$ a $\|u\|=0 \Leftrightarrow u=0$

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$

(iii) $\|u+v\|\leq \|u\|+\|v\|$

Dvojice $(V,\|\cdot\|)$ se pak nazývá normovaný lineární prostor.

Tvrzení: $(V,\|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor.
Pak zobrazení $\rho: V\times V\to [0,\infty)$ definované $\rho(x,y)=\|x-y\|$ je metrika na V.

Poznámka: na $\mathbb{R}^N$: $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq N\|\cdot\|_\infty$

Def: V vektorový prostor. Zobrazení $(\cdot,\cdot): V\times V\to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ nazveme skalárním součinem, jestliže $\forall x,y\in V$ a $\lambda\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ platí

(i) $(x,x)\geq 0$ a $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

(ii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

(iii) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ a $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

Věta (Cauchy-Schwarz nerovnost)
P prostor se skalárním součinem $\Rightarrow$ $\forall x,y\in P$ platí $|(x,y)|\leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$

Věta: P prostor se skalárním souč. $\Rightarrow$ $\|\cdot\|: V\to[0,\infty)$ definovaná $\|x\|:=\sqrt{(x,x)}$ je normou na P.
(Skalární součin generuje normu)

Pozn.: Cauchy-Schwarz $\to$ $|(x,y)|\leq \|x\|\|y\|$

Def: ε-okolí bodu x_0: $U_\varepsilon(x_0) := \{x \in P : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$

Def: $G \subset P$ otevřená $\Leftrightarrow$ $\forall x \in G \ \exists U_\varepsilon(x) \subset G$

$F \subset P$ uzavřená, pokud $P \setminus F$ otevřená

Def: (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P$

$x_0 \in A$ je *vnitřním bodem* A, if $\exists U_\varepsilon(x_0) \subset A$

$x_0 \in P$ je *vnějším bodem* A, if je vnitřním bodem $P \setminus A$

$x_0 \in P$ je *hraničním bodem* A, if není ani vnitřní ani vnější

vnitřek množiny A ... A° ... množina všech vnitřních bodů

vnějšek množiny A ... vnějších bodů

hranice A ... ∂A ... množina hraničních bodů

uzávěr A ... $\bar{A} := A \cup \partial A$

Věta: (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P \Rightarrow A^\circ$ je největší otevřená podmnožina A

$\bar{A}$ je nejmenší uzavřená nadmnožina A

Věta: (hranice pomocí okolí): (P, ρ) metrický, $A \subset P$

$\Rightarrow x \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(x)$ leží alespoň 1 bod z A a alespoň 1 bod z $P \setminus A$

Def (Hustá podmnožina) (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P$.

A je *hustá* v P, if v každém okolí bodu z P leží prvek z A.

Def: Metrický prostor je *separabilní*, if v něm existuje spočetná hustá podmnožina!

Def: Cauchyovská posloupnost.

Def: Úplný prostor: každá Cauchyovská posloupnost konverguje

Def: Banachův prostor, Hilbertův prostor

Def: Omezená množina: (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P$.

A je *omezená*, jestliže $\exists x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset U_R(x_0)$

Def: (Izolovaný a hromadný bod): (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P$.

Bod $x_0 \in A$ ... *izolovaný bod* A, jestliže má prstencové okolí neprotínající A.

Bod $x_0 \in A$ ... *hromadný bod* A, jestliže každé jeho prstencové okolí protíná A.

Věta (hromadné ~ hraniční). (P, ρ) metrický prostor, $A \subset P$

$\Rightarrow \partial A \setminus A = A' \setminus A$ a $\partial A \cup A = A' \cup A = \bar{A}$

Množina všech hromadných bodů A se nazývá *derivace* množiny A, A'.

Věta A uzavřená $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow \partial A \subset A \Leftrightarrow A' \subset A$

Věta (Charakterizace hromadných bodů pomocí posloupností)
(P,ρ) metrický prostor, $A\subset P$. Pak $x_0\in A'$ $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset A\setminus\{x_0\}: x_n\to x_0$

Věta (Charakterizace uzávěru pomocí posloupností)
(P,ρ) metrický prostor, $A\subset P$. Pak $x_0\in\overline{A}$ $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset A: x_n\to x_0$

Věta (Charakterizace hranice pomocí posloupností)
(P,ρ) metrický prostor, $A\subset P$. Pak $x_0\in\partial A$ $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset A, \{y_n\}\subset P\setminus A$: $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$

Věta (Charakterizace uzavřenosti pomocí posloupností)
(P,ρ) metrický prostor, $A\subset P$. Pak A uzavřená $\Leftrightarrow$ $\forall$ konvergentní (v P) posloupnost prvků z A má limitu v A.

Hustota a separabilita ... zmíněno na přídavném listu ...

Pozn.: Separabilní množina ... má spočetnou hustou podmnožinu.
Příklad: Množina $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou je ~~~~ separabilní (díky hustotě racionálních čísel)
Lemma (O separabilitě podmnožin). V separabilním metrickém prostoru je každá množina separabilní. Obecněji, podmnožina separabilní množiny je separabilní.

Úplné metrické prostory

Def (Cauchyovská posloupnost). (P,ρ) metrický prostor. Řekneme, že $\{x_n\}\subset P$ je Cauchyovská v (P,ρ), jestliže $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ m,n>n_0 \Rightarrow \rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

Def (Úplný metrický prostor). Řekneme, že metrický prostor (P,ρ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost jeho prvků v něm konverguje.

Věta (konvergence $\to$ cauchyovskost) (P,ρ) metrický prostor. $\{x_n\}\subset P$ konvergentní $\Rightarrow$ cauchyovská.

Def (Banachův a Hilbertův prostor)
Úplnému normovanému prostoru říkáme Banachův prostor.
Úplnému prostoru se skalárním součinem říkáme Hilbertův prostor.

Věta (Charakterizace úplných podprostorů úplného prostoru). Nechť (P,ρ) je úplný metrický prostor. Pak (A,ρ) je úplný metrický prostor $\Leftrightarrow$ A je uzavřená (v P).

Omezené a kompaktní množiny

Def (Kompaktní množina). (P,ρ) je metrický prostor a $A\subset P$. Řekneme, že A je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

Def (Omezená množina). (P,ρ) je metrický prostor a $A\subset P$. Řekneme, že A je omezená, jestliže existují $x_0\in P$ a $R>0$ tak, že $A\subset U_R(x_0)$.

%

Věta (Kompaktnost ⇒ omezenost & uzavřenost)
Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. ⇒ A je omezená & uzavřená.

Věta (Omezenost & uzavřenost ⇒ kompaktnost v konečné dimenzi)
V konečnědimenzionálním ~~prostoru~~ normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (Kompaktnost ⇒ separabilita)
Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.

Věta (Cantorova o ∩ kompaktů): Nechť $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ je posloupnost neprázdných kompaktů v metrickém prostoru. Pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ je neprázdný kompakt.

Pokrývací věty

Def (Pokrytí množiny). (P,ρ) metrický prostor, $A \subset P$, I je indexová množina a $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ je systém podmnožin P. Řekneme, že $\{M_\alpha\}$ je pokrytí A, jestliže $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$.
Jsou-li všechny množiny v systému $\{M_\alpha\}$ otevřené, hovoříme o otevřeném pokrytí.

Věta (Lindelöfova pokrývací) (P,ρ) metrický prostor a $A \subset P$ je separabilní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat nejvýše spočetné pokrytí.

Věta (Borelova pokrývací) (P,ρ) metrický prostor, $A \subset P$ je kompaktní. Pak lze z každého otevřeného pokrytí množiny A vybrat konečné podpokrytí.

Def (Interval). Intervalem v $\mathbb{R}^N$ nazveme množinu $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$, kde $I_1, \dots, I_N$ jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Je-li množina I otevřená, hovoříme o otevřeném intervalu.
(Podobně uzavřený, omezený, kompaktní interval.)

Tvrzení Interval $I = I_1 \times \dots \times I_N \subset \mathbb{R}^N$ je otevřený ⇔ každý z intervalů $I_1, \dots I_N$ otevřený.
(Analogicky pro uzavřenost, omezenost, kompaktnost.)

Věta (Charakterizace otevřené množiny pomocí otevřených intervalů) Nechť A je otevřená množina v $\mathbb{R}^N$. Pak existuje spočetný systém otevřených omezených intervalů $\{I_n\}$, že $A = \bigcup_n I_n$.

Banachova věta o kontrakci

Def (Kontraktivní zobrazení) (P,ρ) metrický prostor, $T: P \to P$ zobrazení definované na P. Řekneme, že T je kontraktivní zobrazení (kontrakce), jestliže existuje $q \in [0,1)$ tak, že $\rho(Tx, Ty) \leq q\rho(x,y) \quad \forall x,y \in P$.
Bod x_0 se nazývá pevný bod zobrazení T, jestliže $Tx_0 = x_0$.

Věta (Banachova o kontrakci). (P,ρ) úplný metrický prostor a $T: P \to P$ kontraktivní zobrazení definované na celém P. Pak má právě jeden pevný bod.
Dokonce pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ splňující $x_{n+1} = Tx_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ ($x_1 \in P$ libovolné) platí $x_n \to x_0$, kde x_0 je zmíněný pevný bod zobrazení.

Podesí 2/9

1. Je to metrika?

a) vzdálenost na mapě: 1. $\rho(x,y) \geq 0$ ✓ $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ✓
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ ✓
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ ✓ OK.

b) nejkratší vzdálenost jízdy autem
1. asi ok, ale ne všude se dá dojet autem...
2. asi ok - ale if jednosměrné ulice, tak ne...
3. if 1 a 2 ok, asi ok

c) cena jízdenky ČD
1. asi ok - i když jízdenka z A do A asi nejde koupit...
2. snad ok (?)
3. to fakt nevím, kalkulace jsou občas divné...

2. Ověřte, zda množiny posloupností $x = (x_1, x_2, \dots)$ jsou metrické prostory.

a) Množina l_1 všech posloupností splňující $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ s metrikou

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

- $\rho(x,y) \geq 0$ $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ✓
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ ✓ $\big(|x_n - y_n| = |y_n - x_n| \big)$
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ ✓ $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$L_1 = \sum_1^{\infty} |x_n - z_n| = \sum_1^{\infty} |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq \sum_1^{\infty} |x_n - y_n| + \sum_1^{\infty} |y_n - z_n| = RHS$$

b) Množina l_2 splňující $\sum |x_n|^2 < \infty$ s metrikou $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_1^{\infty} |x_n - y_n|^2}$

1. ok
2. ok
3. ... Hölderova nerovnost: $\sum |x_i||y_i| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $p,q \in [1,\infty)$

$$\rho^2(x,y) = \sum |x_n - y_n|^2 = \sum |x_n - y_n||x_n - y_n| = \sum |x_n - z_n - (y_n - z_n)||x_n - y_n|$$

$$\leq \sum |x_n - z_n||x_n - y_n| + \sum |y_n - z_n||x_n - y_n|$$

$$\leq \left(\sum |x_n - z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum |y_n - z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \rho(x,z)\rho(x,y) + \rho(y,z)\rho(x,y) \underset{x \neq y}{\Rightarrow} \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \checkmark$$

c) Množina l_∞ všech posloupností splňujících $\sup_n |x_n| < \infty$ s metrikou $\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$

$\rho(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$

1. ok
2. ok
3. $\rho(x,y) = \sup|x_n - y_n| = \sup|x_n - z_n - (y_n - z_n)| \le \sup|x_n - z_n| + \sup|y_n - z_n|$
$= \rho(x,z) + \rho(z,y)$ ✓

(3) V $\mathbb{R}^2$ s obyčejnou metrikou najděte uzávěry grafů následujících funkcí:

a) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = D(x)$ ... Dirichletova funkce $= \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ... $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ... iracionální čísla jsou hranicí racionálních

[reálná čísla jsou uzávěrem ~~iracionál~~ racionálních

2

(4) Najděte vnitřek, uzávěr a hranici následujících množin

a) Množina všech racionálních čísel z intervalu $(0,1) \subset \mathbb{R}$

- $M^0 = \emptyset$ $\qquad M^0 := \{x \in M : \exists \varepsilon > 0 \ U_\varepsilon(x) \subset M\}$

  → ale v každém okolí $x \in M$ je iracionální číslo

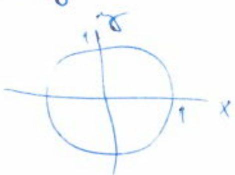
- $\bar{M} = [0,1]$ $\qquad \bar{M} \dots \{x \in P : \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$

- ∂M ... v libovolném okolí leží alespoň 1 bod z M a alespoň ~~...~~
  & alespoň 1 bod z $P \setminus M$

→ $\partial M = [0,1]$

b) Množina všech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňující $x^2 + y^2 < 1$, $y \geq 0$ $\qquad P = \mathbb{R}$
← $A := \dots$

c) $P = \mathbb{R}^3$, $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| < x^2 + y^2 \leq 1\}$



d) $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$\bar{A} = \mathbb{R}$

$\partial M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

A^0

e) Jednotkový kruh se středem v počátku bez úsečky $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x,0) : x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$

$A^0 \qquad < 1 \quad \setminus \{ \qquad \}$

$\bar{A} \qquad \leq 1$

$\partial A = \{ \qquad = 1\} \cup \{ \qquad \}$

(5) Které z následujících množin jsou otevřené resp. uzavřené

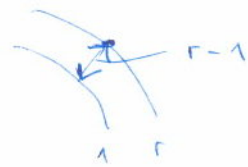
a) $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2>1\}$

<u>Def</u>: $A\subset P$ otevřená $\Leftrightarrow \forall x\in A\ \exists U_\varepsilon(x)\subset A$

$x\in A \Rightarrow x^2+y^2+z^2>1$

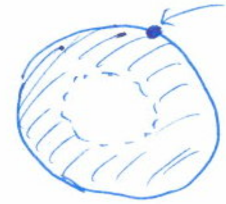
$x^2+y^2+z^2 = $ ~~[illegible]~~

$r^2>1$



$\varepsilon = \frac{r-1}{2} \Rightarrow U_\varepsilon(x,y,z)\subset A$

b) $A := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2+z^2 \le 2\}$



<u>Def</u>: $A\subset P$ uzavřená, pokud $P\setminus A$ otevřená

Ani otevřená, ani uzavřená.

(6) Najděte vnitřek a uzávěr množin (v závislosti na $t\in\mathbb{R}$)

$M_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (|x|+|y|)e^{-(|x|+|y|)} \le t\}$

$z := |x|+|y| \in \mathbb{R}^+$ $\quad ze^{-z}$

$(ze^{-z})' = e^{-z} - ze^{-z} = e^{-z}\underbrace{(1-z)}$

$z=1$ ... maximum

$x,y\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow z\in[0,\infty)$

ze^{-z} ~~pro~~ $z=1$ $= \frac{1}{e}$

$ze^{-z}\in[0,\frac{1}{e}]$

- $t<0$ $\quad M_t=\emptyset \quad M_t^\circ=\emptyset \quad \overline{M_t}=\emptyset$
- $t>\frac{1}{e}$ $\quad M_t=\mathbb{R}^2$
- $t\in(0,\frac{1}{e})$

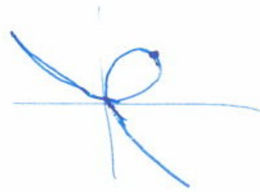
(7) Je množina $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2 \le xyz < 4\}$ omezená?

| (P,ρ) metrický prostor
| $M \subset P$ <u>omezená</u> if $\exists\, x_0 \in P$ a $R > 0$, že $M \subset U_R(x_0)$ ... $\rho(x_0, x) < R$ $\forall x \in M$

- $\mathbb{R}^1$: $2 \le x < 4$ ... omezená ✓
- $\mathbb{R}^2$: $2 \le xy < 4$ ... na obrázku: $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ $\Big\}$ $y = \frac{3}{x}$ splňuje

$\forall r_0 \in \mathbb{R}^2\ \forall R > 0$ najdu x, y: $2 \le xy < 4$, např. $y = \frac{3}{x}$
a zároveň $|x|$ tak malé, že $\rho(r_0, r) > R$

(8) Dokažte omezenost množiny $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$



- $x = 0 \Rightarrow y = 0$
- $x > 0$ ...

$x = 1$ ... $1 + y^3 - 2y = 0$ ...

1 řešení: $y = 1$

- Polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$
  $y = r\sin\varphi$

$\to$ ~~$r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 2r^2\cos\varphi\sin\varphi$~~

$\cos^3\varphi + \sin^3\varphi = \frac{2}{r}$

$r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 2r^2\cos\varphi\sin\varphi$

$r = \dfrac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ ... omezené pro $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$?