Sada příkladů 2/6

Číselné řady

Číselné řady s obecnými členy

Použitím kritérií pro konvergenci řad rozhodněte o konvergenci (absolutní i neabsolutní, je-li to možné) či divergenci následujících řad. Pokud řada obsahuje parametry, proveďte vzhledem k nim diskusi

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

6. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \frac{1}{\mathrm{e}^n}$$

9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}), \quad k \in \mathbb{R}$$

10.
$$\sum_{n=10}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$$
11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^{100}}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$$
12.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln\ln n}$$
13.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$$
14.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$$
15.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$
16.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p},\quad p\in\mathbb{R}$$
17.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p},\quad p\in\mathbb{R},\ 0<x<\pi$$
18.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}},\quad p\in\mathbb{R}$$
19.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}+n^p},\quad p\in\mathbb{R}$$
20.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\Big)^p,\quad p\in\mathbb{R}.$$

Řady s obecnými členy

Může nastat (K) v (D) v (O), také (AK) vs. (NAK) ((AK) $\Rightarrow$ (NAK))

Abelovo & Dirichletovo kritérium $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\{a_k\}$ monotónní.

Dirichlet: $a_k \to 0$ & $\{b_k\}$ omez. část. součty $\Rightarrow$ $\sum a_k b_k$ (K)

Abel: $\{a_k\}$ omezená & $\sum b_k$ (K) $\Rightarrow$ $\sum a_k b_k$ (K)

$\Rightarrow$ Dirichlet $\Rightarrow$ Leibniz ($a_k \to 0$ & $\sum (-1)^k$ má omez. část. součty)

· Kombinace Abel & Dirichlet: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \operatorname{arctan} k$ ... $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ (K) dle Dirichleta, původní řada (K) podle Abela

· ~~Abel~~ Abel vícekrát za sebou. $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{k}{k+1} \operatorname{arctan} k \to$ + omezený člen $\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$

Srovnávací krit. I (připomínka): $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{b_k\} \geq 0$, $|a_k| \leq b_k$

$$\sum b_k \text{ (K)} \Rightarrow \sum a_k \text{ (AK)}$$

Tvrzení 8.4.5: $\sin(ak)$ má omezené částečné součty
$a \in \mathbb{R}$
$\cos(ak)$ — " — — " — — " — $\Leftrightarrow$ a není násobkem 2π

Přerovnání řady $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce $\sum a_{\varphi(k)}$ je přerovnání $\sum a_k$

Kladná a záporná část: $x \in \mathbb{R}$ $x^+ := \max(0, x)$ $x^- := \max(-x, 0)$

$\Rightarrow x = x^+ - x^-$ $|x| = x^+ + x^-$

Charakterizace K, AK: $\sum a_k$ (AK) $\Leftrightarrow$ $\sum a_k^+$ (K) & $\sum a_k^-$ (K)

$$\sum a_k \text{ (NAK)} \Leftrightarrow \sum a_k^+ = \sum a_k^- = \infty$$

Věta o přerovnání AK řady: $\sum a_k$ (AK) $\Rightarrow$ každé přerovnání AK a má stejný součet

Riemannova věta o přerovnání NAK řady:
$\sum a_k$ (NAK) $\Rightarrow$ $\forall S \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání řady $\sum a_k$ se součtem S.

Zobecněná řada: M je spočetná množina ($\exists$ bijekce mezi M a $\mathbb{N}$).
Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{m \in M} a_m$ (K) if $\exists \varphi: \mathbb{N} \to M$ že $\sum a_{\varphi(k)}$ (AK).

Cauchyův součin řad $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$ a nechť $\sum a_k$ a $\sum b_k$ (AK).
Potom $\sum_{i,j=1}^\infty a_i b_j$ (AK) a platí $\sum_{i,j=1}^\infty a_i b_j = \left(\sum_{k=1}^\infty a_k\right)\left(\sum_{k=1}^\infty b_k\right)$

Pokorný - Sada příkladů 2/7

MP7.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ $\quad |a_n| = \left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

AK ✓ (Srov. krit. I) $\quad = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

MP7.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{4^n}$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$|a_n| = \frac{1}{4^n}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ konverguje. $\rightarrow$ AK ✓ (Srov. krit. 1)

MP7.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$(-1)^{\sqrt{n}}$	-1	-1	-1	1	1	1	1	1

Řešení viz Kopáček, další. ~~NAK~~ K NAK (Kopáček - příklad 21 p. 184 PřQ) NEXT PAGE

MP7.4 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \quad |a_n| = \frac{1}{n}$ ¬AK

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3k+1} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3k+2} + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3k+3} \quad \dots \forall 3 \text{ K dle Leibnitz.}$$

$\rightarrow$ NAK

MP 7.5 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n} \quad x \in \mathbb{R}$

pro dostatečně velké n

$$\sin \frac{x}{3^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n \sin\frac{x}{3^n}}{2^n \frac{x}{3^n}} = 1 \quad ✓$$

$x \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ✓ $\quad$ AK $\quad$ AK ⇑

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, že $\quad \sum_{n_0}^{\infty} \left|2^n \sin \frac{x}{3^n}\right| \leq \sum_{n_0}^{\infty} 2^n \frac{|x|}{3^n} = |x| \sum_{n_0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ K

MP 7.6 $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} \dots$

No chance for AK ✗

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}} =$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} - \frac{\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}\right)$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} - \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \sum \frac{\sqrt{2n+1}-1-\sqrt{2n}-1}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)} \quad \propto \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$= \underbrace{\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{K} - \underbrace{\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+(-1)^n)}}_{\propto \frac{1}{k}\ ✗}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \boxed{\text{see page 3}}$$

MP 7.7 $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} = \underbrace{\underbrace{\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}}_{\text{(Leibniz) } K} + \underbrace{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{D}}_{D}$ (Aritmetika řad)

MP 7.8 $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \sum (-1)^n \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$ $\boxed{\text{see page 3}}$

D

MP 7.9 $\sum_{1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) \quad k \in \mathbb{R}$

$n\pi$ or $n\pi$

$$a_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right) \xrightarrow[n^2 \gg k^2]{n\to\infty} \sin \pi n = 0 \checkmark \text{ Nutná podmínka ok.}$$

$$\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2} - n + n\right)\right) = \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right)\cos \pi n + \cancel{\cos\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right)\underbrace{\sin \pi n}_{0}}$$

$$= (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right) \quad \text{.. 4 Leibnitz: klesající a jde k 0?}$$

$$\sin \pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+k^2}+n}{\sqrt{n^2+k^2}+n} = \sin \pi \frac{\cancel{n^2}+k^2-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+k^2}+n} = \underbrace{\sin \frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}}$$

K podle L

• klesá
• → 0

?AK? → $\sin \frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n} \sim \frac{1}{n}$ pro $n \gg 1$ NAK

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ ... Kopáček, Příklady 2, Příklad 9 p. 184 ②

$\longrightarrow$ Absolutně nekonverguje

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[\sqrt{n}]$	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	+1

$$= -\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}_{A_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{8}\right)}_{A_2} - \left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{15}\right) + \dots + (-1)^k \underbrace{\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\dots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)}_{A_k}$$

$$A_k = \underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\dots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1)^2-k^2 = 2k+1 \text{ členů}} < \frac{2k+1}{k^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_k$$

- kladné členy A_k
- $A_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$
- $\Rightarrow$ klesající ✓

$$\underbrace{A_k - A_{k+1}}_{\text{klesá nebo roste?}} = \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{k^2+m} - \sum_{m=0}^{2(k+1)} \frac{1}{(k+1)^2+m}$$

$$= \sum_{m=0}^{2k} \left(\frac{1}{k^2+m} - \frac{1}{(k+1)^2+m}\right) - \frac{1}{(k+1)^2+2k+1} - \frac{1}{(k+1)^2+2k+2}$$

$$= \sum_{m=0}^{2k} \frac{\cancel{k^2}+2k+1+\cancel{m}-\cancel{k^2}-\cancel{m}}{(k^2+m)((k+1)^2+m)} - \quad -$$

$$= \sum_{m=0}^{2k} \frac{2k+1}{(k^2+m)((k+1)^2+m)} - \frac{1}{(k+1)^2+2k+1} - \frac{1}{(k+1)^2+2k+2}$$

$$> \frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3}$$

> 0 pro dost velké k

$\Rightarrow \sum (-1)^k A_k$ (K) podle Leibnitze

- $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ lze najít k, že $k^2 \le n < (k+1)^2$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} (-1)^j A_j \le s_n < \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j A_j$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k} \ \overset{\text{NEA}}{\text{(K)}} \text{ a má stejný součet jako řada } \sum_{1}^{\infty} (-1)^k A_k$$

$\hookrightarrow$ NAK

6 $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}-1} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2k}+1} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right) = \sum \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-2}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$$

$$\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k} \cdot \frac{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}} = \frac{\cancel{2k}+1-\cancel{2k}}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k}}\,\frac{1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}}_{\sim \frac{1}{k^{3/2}} \to K} - 2\sum \underbrace{\frac{1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}}_{\sim \frac{1}{k} \to D}$$

$$\to |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ...no chance for AK}$$

• Leibniz nefunguje (~~...~~ není monotónní)

8 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} = \sum(-1)^n \underbrace{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left[n \ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right] = \exp \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)}$$

$$\to x_n = \frac{1}{n} : \lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{1/x}}{e} = \lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\Big(\underbrace{\frac{1}{x}\ln(1+x)}_{\to 1} - \underbrace{\ln e}_{1}\Big)$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to0+}\frac{-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}}{1} = \lim \frac{\frac{1}{1+x}-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}$$

$$\to \text{Taylor} : \lim_{x\to0+}\left\{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-1\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\left(\cancel{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^3)-\cancel{1}\right)$$

$$= \lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{2}+O(x)\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

→ Není splněna nutná podmínka konvergence.

D

$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$

MP 7.10 $\sum_{10}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$

Leibnitz: • $\to 0$ ✓

• ~~mon~~ nerostoucí?

• $\sum \frac{(-1)^n}{\ln\ln\ln n}$ K (Leibnitz) $\sqrt[n]{n} \to 1$

$\to 1/\ln\ln\ln n$ ... monotónně klesá

• $\{\sqrt[n]{n}\}$ omezená $\to$ from some n $\searrow$ klesá

$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$ K (Abel) $\quad \sum \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln\ln\ln n}$ D

$(x^{1/x})' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

• mění znaménko v $x=e$

• pro $x>e$ $(x^{1/x})'<0$ ... klesá

MP 7.11 $\sum_{1}^{\infty} \underbrace{\frac{(\ln n)^{100}}{n}} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}_{\text{omezené } s_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{100}}{n} \overset{l'H}{=} \lim \frac{100(\ln n)^{99}}{n} = \dots = \lim_{n\to\infty} \frac{100!}{n} = 0 \checkmark$$

jde limle

$$f(x) = \frac{(\ln x)^{100}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{100(\ln x)^{99} \cancel{\frac{1}{x} \cdot x} - (\ln x)^{100}}{x^2} = \frac{\ln^{99} x\,(100-\ln x)}{x^2}$$

Klesá od $\ln x > 100$

$x > e^{100}$

$\to$ Dirichlet. ($a_k \to 0$, b_k omez. část. součty)

$$\sum_{n=1}^{m} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) = \operatorname{Im} \sum_{1}^{m} e^{\frac{in\pi}{4}} = \operatorname{Im}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{1-e^{\frac{im\pi}{4}}}{1-e^{\frac{i\pi}{4}}}\right.$$

$$\left|\sum_{1}^{m} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right| \le \frac{2}{|1-e^{\frac{i\pi}{4}}|}$$

$$\left|1-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}$$

(12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$

$\sin\left(n+\frac{1}{n}\right) = \sin n \cos\frac{1}{n} + \cos n \sin\frac{1}{n}$

$\frac{1}{\ln\ln n}$ ... monotónně klesá (pro $n \geq n_0$)

- $\sum \frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n} \underbrace{\cos n}_{\text{omez. částečné součty}}$ ... klesá

$\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\ln\ln x}\right)' = \frac{\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln\ln x - \sin\frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{\ln^2\ln x} = -\frac{1}{x}\,\frac{\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\ln\ln x + \sin\frac{1}{x}\frac{1}{\ln x}}{\ln^2\ln x}$

$\frac{1}{\ln\ln n}$ monotónně klesá (pro $n > n_0$), $> 0 \to 0$ $\left(\begin{array}{l}\ln\ln n > 0\\ \ln n > 1\\ n > e\end{array}\right)$

$\sin\frac{1}{n}$ pro $n > \frac{\pi}{2}$ monotónně klesá, $> 0 \to 0$

$\longrightarrow$ (K) podle Dirichleta

- $\sum \cos\frac{1}{n}\,\frac{\sin n}{\ln\ln n}$ ... $\sum \frac{\sin n}{\ln\ln n}$ K podle Dirichleta

$\underbrace{\cos\frac{1}{n}\quad \text{rostoucí omezená posloupnost } \left(n > \frac{\pi}{2}\right)}$

$\Downarrow$

$\sum \cos\frac{1}{n}\,\frac{\sin n}{\ln\ln n}$ K podle Abela

$\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$ (K)

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum (-1)^n \frac{\frac{1-\cos 2n}{2}}{n} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{n}}_{K(\text{Leibniz})} - \sum \frac{(-1)^n}{n}\cos(2n)\right)$

- $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (K) (Leibniz)
- $\sum \underbrace{(-1)^n}_{\cos \pi n} \frac{\cos(2n)}{n} = \sum \frac{\cos\pi \cos(2n)}{n} = \sum \frac{\cos(2n+\pi)}{n} = -\sum \frac{\cos(2n)}{n}$

$\cos(2n+\pi) = \cos\pi\cos 2n - \underbrace{\sin\pi}_{0} \sin 2n$

- $\cos(2n)$ ... omezené částečné součty
- $\frac{1}{n}$ ... klesající $\to 0$

$\Big\}$ $\sum \frac{\cos(2n)}{n}$ (K) Dirichlet

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}(-1)^n$ (K)

(NAK) (zaměněný řad)

14 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$ $\quad$ (= Vyšínal 2-17e)

$\pm \cos(\pi(n-1))$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos(\pi(n-1)) + \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\left[\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) - \cos(\pi(n-1))\right]$$

$$= \underbrace{\sum_{2} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}}_{K \text{ (Leibnitz)}} + \quad \dots$$

Lagrangeova věta o střední hodnotě: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$ $\quad \xi \in (a,b)$

- f spojitá na $[a,b]$
- f diferenc. na (a,b)

$$f'(\xi)(a-b) = f(b) - f(a)$$

$f(x) = \cos x$ $\qquad -\sin \xi \,(b-a) = \sin(b) - \sin(a)$

$\Rightarrow |\sin b - \sin a| < |b-a|$ $\qquad \dots \; b = \frac{\pi n^2}{n+1}$

$a = \pi(n-1)$

$$\sum_{2}^{\infty}\left|\frac{1}{\ln^2 n}\left(\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) - \cos(\pi(n-1))\right)\right| \leq \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}\left|\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi(n-1)\right|$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \frac{\pi}{\ln^2 n}\left|\frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n+1}\right| = \sum \frac{\pi}{(n+1)\ln^2 n} \dots \text{K}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} \quad \text{K}$$

<u>Ahelo</u> $\cancel{\sum \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi\left(\frac{n^2+1+1}{n+1}\right)\right)}$

$$\cos \pi \frac{n^2}{n+1} = \cos \pi \frac{n^2-1+1}{n+1} = \cos \pi \left(n-1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \cos \pi(n-1) \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - \underbrace{\sin \pi(n-1) \sin \frac{\pi}{n+1}}_{0} = -\cos(\pi n) \cos \frac{\pi}{n+1}$$

$$= (-1)^{n-1} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$$ omez. monotónní (pro $n > n_0$)

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ ... $\sum_1 \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ (K) podle Leibnitze

$\frac{n-1}{n+1}$ ... omezená monotónní ?

- $\frac{n-1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 1$ $\quad a_n \to 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = \frac{1}{3}$

$a_3 = \frac{1}{2}$

$a_n < 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n}{n+2}}{\frac{n-1}{n+1}} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)} = \frac{n^2+n}{n^2+n-2} > 1$$

$\to \sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ (K) podle Abela

(16) $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ $\quad p \in \mathbb{R}$

- AK? $\sum \frac{1}{n^p}$ ... pro $p > 1$ $\underline{AK}$
- $p = 0$: $\sum (-1)^n$ ... Osciluje
- $p \in (0,1)$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ ... $\underline{K}$ podle Leibnitze
- $p < 0$: D (nesplňuje podmínku konvergence)

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ $\quad 0 < x < \pi$ $\quad p \in \mathbb{R}$

- AK? $\left| \frac{\sin(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}$ ... $p > 1$ $\underline{AK}$
- $\sin(nx)$ omez. část. součty, $p > 0 \Rightarrow \frac{1}{n^p} \to 0$, klesá $\Rightarrow$ $\underline{K}$ Dirichlet
- $p = 0$ ... $\sum \sin(nx)$ < K pro $x = k\pi$; pro $x \neq k\pi$ není splněna podmínka konvergence

$$\left(x^{-p-\frac{1}{x}}\right)' = -\left(p + \frac{1}{x}\right) x^{-p-\frac{1}{x}-1}$$

- $p < 0$ ... ~~[illegible]~~ $\underline{O}$

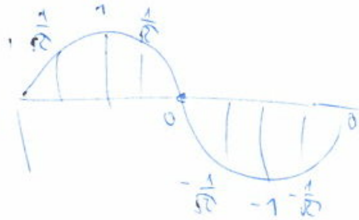
(18) $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ $\quad p \in \mathbb{R}$ $\quad = \sum \frac{(-1)^n}{n^p} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

- $p > 0$ ... K podle Leibnitze
  - ~~[illegible]~~ $p > 1$ ... AK
  - $p \in (0,1)$ ... NAK

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}+n^p}$ $p\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{n\pi}{4} & \leftrightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}$$

• $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{n\pi}{4}+n^p}\right| < \frac{1}{n^p-1} \sim \frac{1}{n^p}$ ... AK pro $p>1$



• $p\le 0$ ... není splněna nutná podmínka konvergence

• $p\in(0,1]$ ... NAK ?

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \right)^p \quad p \in \mathbb{R}$ $\boxed{< \frac{1}{\sqrt{2n+1}}}$

- Pro absolutní konvergenci, see příklad 22 from 6/22
  - Raabe: K pro $p > 2$, D pro $p < 2$
  - Gauss: D pro $p = 2$ → $p > 2$ AK ⇒ K

- Pro neabsolutní: Leibnitz?

Tedy: $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{\underbrace{\frac{1}{2}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{(2n-1)}{2n}}_{<1}}{} \right) \right\}$ monotónně klesá → 0 ?

Zajímá nás $\underline{p \le 2}$

Remember: Pokroj 1/2, příklad 10, matematické indukce:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad ✓$$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{1/p} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \quad ✓$$

$$\to \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \right)^p \text{ monotónně klesá} \to 0 \text{ pro } \underline{p > 0}$$

⇒ K podle Leibnize pro $p > 0$

- Summary:
  - $p \le 0$ D/O
  - $p > 0$ K
  - $p > 2$ AK

$\boxed{\text{Ověřovat podmínky!}}$

Příklad:

$$\underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{D} = \sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\substack{K \\ \text{(Leibnitz)}}} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

omezené, jde $\to 0$

ALE NE MONOTÓNNĚ!