Sada příkladů 2/2

Obyčejné diferenciální rovnice

Separované proměnné

Nalezněte obecné řešení nebo řešení Cauchyovy úlohy

1. $y' = \alpha y(P_m - y)$, $y(0) = y_0 \in (0, P_m)$ (regulovaný růst počtu obyvatel)

2. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

3. $y' = \dfrac{1-x}{y}$

4. $y' = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{2y(1+\mathrm{e}^x)}$

5. $y' = \sqrt{1-y^2}$

6. $y' = \dfrac{y \ln y}{\sin x}$

7. $y' = -\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$

8. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

9. $y' = -\dfrac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$

10. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$

11. $y' = \dfrac{2xy^2}{1-x^2}$, $y(0) = 1$.

12. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y'(2-e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$$

procházející bodem $(0, \frac{\pi}{4})$ splňující
a) $y(\ln 3) = 0$ b) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{4}$ $y(\ln 3) = \frac{\pi}{2}$.

13. Kterými body prochází právě jedno maximální řešení rovnice $xy' - y = 0$?

14. Meteroid, který se nachází výhradně pod vlivem zemské přitažlivosti, začíná padat k Zemi z klidové polohy ve vzdálenosti h. Nalezněte závislost rychlosti meteroidu na vzdálenosti od povrchu Země. Jakou rychlostí dopadne na zemský povrch, zanedbáme-li vliv zemské atmosféry? Obě úlohy řešte i pro limitní případ $h = \infty$. Poloměr Země je přibližně 6378 km.

15. Najděte křivky, pro které platí, že úsečka, ležící na tečně této křivky s krajními body na souřadných osách, má střed v bodě dotyku. Napište rovnici křivky, která prochází bodem (2,3).

Homogenní rovnice a rovnice, které lze na homogenní převést

Není-li řečeno jinak, nalezněte obecné řešení nebo řešení dané Cauchyovy úlohy

16. $y'(x+y) + x - y = 0$

17. $y' = \dfrac{x+2y}{x}$

18. $y' = \dfrac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$

19. $y' = \dfrac{y}{x} \cos \ln \dfrac{y}{x}$

20. $y' = \dfrac{y + \sqrt{xy}}{x}$

21. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

22. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{y}{x})$, $y(1) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

23. $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$

24. $y' = \frac{1}{x + y - 2}$

25. $y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$

26. $y' = \frac{y + x}{x + 3} - \ln\frac{y + x}{x + 3}$.

ODR

$\boxed{\text{Už bylo v zimním semestru}}$ (ČZP I, u primitivních funkcí)

ODR n-tého řádu $\quad F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ na (a,b)

rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci: $\quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ na (a,b)

Řešení ODR: $y(x)$, které řeší na $\forall x \in (a,b)$

Lineární ODR 1. řádu

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = f(x)$$
$$y(x_0) = y_0$$

$\to$ metoda integračního faktoru: $P(x) = \int p(x)\,dx$

$$\to \left(y(x)e^{P(x)}\right)' = y'(x)e^{P(x)} + p(x)y(x)e^{P(x)} = f(x)e^{P(x)}$$

$$\Rightarrow y(x)e^{P(x)} = \int f(x)e^{P(x)}\,dx =: Q(x) + C$$

$$\Rightarrow y(x) = Q(x)e^{-P(x)} + C e^{-P(x)}$$ $\to$ C z poč. podm. $y(x_0) = y_0$

Řešení je jednoznačné.

Lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad \text{a} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{a} \quad y'(x_0) = y_1$$

$\to y = y_H + y_P$ $\leftarrow$ jedno partikulární řešení

y_H: řeší homogenní ODR $\to$ charakteristický polynom, fundamentální systém

y_P:
- speciální pravá strana
- variace konstant

ODR: $n\in\mathbb{N}$, $f:\mathbb{R}^{n+2}\to\mathbb{R}$, $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$

Řešení ODR: $y:(a,b)\to\mathbb{R}$, y má na (a,b) $y^{(n)}$ vlastní, $\forall x\in(a,b)$ platí

ODR rozřešená vzhledem k $y^{(n)}$: $y^{(n)} = g(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ $\quad g:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$

Systém ODR 1. řádu: $\vec F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ $\quad \vec y' = \vec F(x,\vec y)$

↳ Řešení: $\vec y=(y_1,\dots,y_n)$ mají na (a,b) vlastní 1. derivace a $\forall x\in(a,b)$

Teorie pro $\vec y' = \vec F(x,\vec y)$

Cauchyova úloha: Hledání $\vec y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ splňující $\vec y' = \vec F(x,\vec y)$ na (a,b)
a $\vec y(x_0)=\vec y_0$, kde $x_0\in(a,b)$ a $\vec y_0\in\mathbb{R}^n$ jsou dané a patří do $\mathcal{D}_{\vec F}(x,\vec y)$

Řešení považujeme za stejná $\Leftrightarrow$ $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$ & $\vec y_1=\vec y_2$ na (a_1,b_1)

Prodloužení řešení: $\vec y_1$ řeší na (a_1,b_1), $\vec y_2$ řeší na (a_2,b_2).
Jestliže $(a_1,b_1)\subset(a_2,b_2)$ a $\vec y_1 = y_2$ na (a_1,b_1) $\to$ $\vec y_2$ je prodloužením $\vec y_1$

Maximální řešení: už nelze prodloužit.

Peanova existenční věta

$\vec F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ spojitá na otevřené množině $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$ a $(x_0,\vec y_0)\in\Omega$.
Pak $\exists\,\delta>0$, že na $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $\exists$ řešení Cauchyovy úlohy $\vec y' = \vec F(x,\vec y)$ s $\vec y(x_0)=\vec y_0$.

Picard-Lindelöfova existenční věta

$\vec F:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ spojitá na otevřené množině $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0,\vec y)\in\Omega$, a $\vec F$ je na Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k posledním n-tici proměnných (i.e., $\vec y$).
Pak $\exists\,\delta>0$, že na $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $\exists!$ řešení Cauchyovy úlohy $\vec y' = \vec F(x,\vec y)$ s $\vec y(x_0)=\vec y_0$.

Lokální lipschitzovskost vzhledem k posledním n-tici proměnných:
$\forall (x_0,\vec y_0)\in\Omega$ $\quad\exists\,K>0,\ \delta>0$ takové, že

$$\left|\vec F(x,\vec y_1) - F(x,\vec y_2)\right| \le K\,|\vec y_1-\vec y_2| \quad \text{kdykoli } (x,\vec y_1),(x,\vec y_2)\in U_\delta((x_0,\vec y_0))$$

Slepování řešení: Nechť $\vec y_1$ řeší $\vec y' = \vec F(x,\vec y)$ na (a,b) a $\vec y_2$ řeší na (b,c).
Pokud navíc $\lim\limits_{x\to b_-}\vec y_1(x) = \lim\limits_{x\to b_+}\vec y_2(x) = \vec z\in\mathbb{R}^n$ a $\vec F$ spojitá v $(b,\vec z)$,
pak

$$\vec y(x) = \begin{cases} \vec y_1(x) & \text{pro } x\in(a,b) \\ \vec z & \text{pro } x=b \\ \vec y_2(x) & \text{pro } x\in(b,c) \end{cases} \quad \text{řeší } \vec y' = \vec F(x,\vec y) \text{ na } (a,c).$$

$\boxed{y' = f(x)}$ ~~...~~ $y' = f(x)$
$y(x_0) = y_0$
f spojitá na (a,b)
$x_0 \in (a,b)$

$y(x) = y_0 + (R)\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$
jednoznačné řešení na (a,b)

$\boxed{y' = g(y)}$ Řešením je $y = G^{-1}(x+C)$, kde $G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}$

$\rightsquigarrow y' = \frac{dy}{dx} = g(y) \rightsquigarrow \frac{dy}{g(y)} = dx \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx = x + C$

$\rightarrow G(y) = x + C \rightarrow y = G^{-1}(x+C)$

<u>Věta o řešení $y' = g(y)$</u>: Nechť $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá nenulová na $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$.
Nechť G primitivní k $y \to \frac{1}{g(y)}$ na (α,β). Pak na intervalu $G((\alpha,\beta))$
$\exists G^{-1}$ a každé maximální řešení v $\Omega = \mathbb{R} \times (\alpha,\beta)$ má tvar
$y(x) = G^{-1}(x+C)$, kde $C \in \mathbb{R}$, a je def. na intervalu
$I_C := \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in (\alpha,\beta)\ G(y) = x + C\} = \{x = z - C : z \in G((\alpha,\beta))\}$.
Navíc každým bodem $(x_0, y_0) \in \Omega$ prochází právě jedno maximální řešení (v Ω).

- triviální řešení ... $g(y_0) = 0 \Rightarrow y = y_0$ je řešením $y' = g(y)$.
- Slepování řešení. Nechť $g(\theta) = 0$ ($\rightsquigarrow$ triviální řešení $y = \theta$) a $a \in \mathbb{R}$ a g spojité zprava v θ. Pak lze v každém <u>a</u> řešení $y = G^{-1}(x+C)$ slepit s triviálním řešením identicky rovným θ.

$$y = \begin{cases} \theta & \text{pro } x \le a \\ G^{-1}(x+C) & \text{pro } x \in (a,b) \end{cases}$$

$\boxed{y' = f(x)g(y)}$ separované proměnné ... Řešením je $\underline{y = G^{-1}(F(x)+C)}$
kde $G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$ a $F(x) = \int f(x)\,dx$

$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \rightsquigarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

$\rightsquigarrow G(y) = F(x) + C \rightarrow y = G^{-1}(F(x)+C)$

<u>Věta o řešení $y' = f(x)g(y)$</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$,
F primitivní fce k f na (a,b), G primitivní fce k $y \to \frac{1}{g(y)}$ na (α,β). Pak na $G((\alpha,\beta))$
$\exists G^{-1}$ a každé max. řešení v $\Omega = (a,b) \times (\alpha,\beta)$ má tvar $y(x) = G^{-1}(F(x)+C)$
kde $C \in \mathbb{R}$, a je def. na $I = \{x \in (a,b) : \exists y \in (\alpha,\beta)\ G(y) = F(x) + C\}$. Každým bodem $\exists!$ max. řeš. (v Ω)

$\boxed{\text{Homogenní diferenciální rovnice}}$

$y' = f(x,y)$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ def. na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ a $\forall \lambda \neq 0$ platí $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$

N.B. f je tedy konstantní na jednotlivých přímkách vycházejících z počátku

Řešme pro $x \neq 0$: $f(x,y) = f\left(x \cdot 1, x \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) =: g\left(\frac{y}{x}\right)$

→ Definujeme: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

" $y(x) = x z(x) \to y'(x) = z(x) + x z'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right) = g(z(x)) \to \underbrace{z'(x) = \frac{g(z) - z}{x}}_{\text{separované proměnné}}$

$\boxed{\text{Rovnice, které lze na homogenní převést}}$

Rovnice typu $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$

Pro $a\beta \neq \alpha b$ má soustava $\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{matrix}$ jednoznačné řešení $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Položme $\xi := x - x_0$ a $\eta := y - y_0$

→ Pro funkci $\eta: \xi \to \eta(\xi) := y(\xi + x_0) - y_0$

$$\frac{d\eta}{d\xi}(\xi) = \frac{dy}{dx}(\xi + x_0) = f\left(\frac{a(\xi + x_0) + b(\eta + y_0) + c}{\alpha(\xi + x_0) + \beta(\eta + y_0) + \gamma}\right) = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}\right)$$ ... homogenní diferenciální rovnice.

Pro $a\beta = \alpha b$ tři případy:

1. $\beta = 0, \alpha \neq 0 \Rightarrow b = 0$ ... $y' = f\left(\frac{ax + c}{\alpha x + \gamma}\right) = $ "$f(x)$" ✓

2. $\alpha = \beta = 0, \gamma \neq 0$ ... $y' = f\Big(\underbrace{\frac{a}{\gamma}x + \frac{b}{\gamma}y + \frac{c}{\gamma}}_{\equiv z}\Big) = $ "$f(z)$"

3. $\beta \neq 0$ & $a = \frac{b}{\beta}\alpha$ ... $y' = f\left(\frac{\frac{b}{\beta}\alpha x + \frac{b}{\beta}\beta y + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$

$$= f\Big(\frac{b}{\beta} + \frac{c - \frac{b}{\beta}\gamma}{z}\Big) = \text{"}f(z)\text{"}$$

$z = \alpha x + \beta y + \gamma$

Postup hledání maximálních řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = g(y)f(x), \tag{1}$$

kde f a g jsou reálné funkce reálné proměnné:

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce f. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, potom funkce $y \equiv c$ na libovolném intervalu z 1. kroku je stacionární řešení rovnice (1).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy f je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (1), která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro něj platí§

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x). \tag{2}$$

   Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Potom existuje konstanta $c \in R$ taková, že platí

$$G(y(x)) = F(x) + c \tag{3}$$

   na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; F(x) + c \in G(J)\}.$$

   Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + c),$$

   kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku "slepíme" všechna maximální řešení rovnice (1).

$\boxed{\text{ODR}}$ See: Bárta & Pražák: ODR ... online

Už umíme:

- Lineární ODR 1. řádu: $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ ⇝ integrační faktor
- lineární ODR s konstantními coeficienty: $y = y_H + y_P$ (y_H: $FS \sim e^{\lambda x}$; y_P: variace konstant / spec. RHS)

Teď budeme dělat:

Rovnice se separovanými proměnnými

ODR typu: $y' = g(y)f(x)$ (1)

- Pokud $g(y_0) = 0 \Rightarrow y(x) = y_0$ je řešením (1) $\forall$ interval $\subset \mathcal{D}_f$ — tzv. stacionární řešení

Věta 1 (Řešení ODR se separovanými proměnnými)

- Je dána rovnice (1). ~~Nechť f(x) je spojitá~~. ~~Nechť g(y) je spojité~~
- $f(x)$ spojitá na I ⎫
- $g(y)$ spojitá a nenulová na J ⎭ I, J ... otevřené intervaly
- $F(x), G(y)$ jsou primitivní funkce k $f(x)$ a $\frac{1}{g(y)}$ na I a J
- Označ $G^{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$
- Nechť $\tilde{I} \subset I$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou zvoleny tak, že $F(x)+c$ leží v $\mathcal{D}(G^{-1}(z))$ (tedy v $G(J)$) $\forall x \in \tilde{I}$.

Potom funkce $y(x) = G^{-1}(F(x)+c)$ $x \in \tilde{I}$ je řešením (1).

Poznámka: Předpoklad "$F(x)+c$ leží v oboru hodnot G" je potřeba hlídat! Formální výpočet totiž může vést k funkci, jejíž definiční obor je větší než interval, na němž tato funkce řeší rovnici.

- ODR: $f: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ ... ODR n-tého řádu
- Prodloužení řešení ⇝ maximální řešení (← už nejde prodloužit)

Příklad 1 Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$

- Zřejmě, že $y(x) = 0$ je jediné stacionární řešení.
- $f(x) = 1$, $g(y) = 2\sqrt{|y|}$, $g(y) = 0$ pro $y = 0$
- Aplikace věty 1:

1. Na $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$: $F(x) = \int f(x)\,dx = x$

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int \frac{1}{2\sqrt{-y}}\,dy = -\sqrt{-y}$$

$\rightarrow G(J) = (-\infty, 0)$

$G^{-1}(z)$: $z = -\sqrt{-y} \rightarrow -z = \sqrt{-y} \rightarrow (-z)^2 = -y \rightarrow y = -z^2$

$G^{-1}(z) = -z^2$

$F(x) + c = \cancel{x} + c \rightsquigarrow \tilde{I} = (-\infty, -c) \dots F(\tilde{I}) + c = G(J)$

$\rightarrow$ Řešení: $y(x) = -(x+c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$

Pozor: pro $x > c$ funkce není řešením ODR

2. Na $I = \mathbb{R}$, $J = (0, \infty)$: $F(x) = x$

$G(y) = \sqrt{y} \dots G(J) = (0, \infty)$

$\rightarrow$ Řešení $y(x) = (x+c)^2$, $x \in (-c, \infty)$

(Pro $x < -c$ není řešením)

Jsou tato řešení maximální? Jsou všechna?

- Může se stát, že Věta 1 dá řešení na (a, b) a (b, c) a lze spojitě dodefinovat v $\underline{b}$ a tak získat řešení na větším intervalu (a, c).

Lemma 2 (O slepování)

Nechť:
- $y_1(x): (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $y_2(x): (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou řešení $y' = f(x, y)$ (2)
- $\lim_{x \to x_0^-} y_1(x) = y_0 = \lim_{x \to x_0^+} y_2(x)$
- $f(x, y)$ je spojité v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Potom funkce
$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & x \in (a, x_0) \\ y_2(x) & x \in (x_0, b) \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$$
je řešením (2) v celém (a, b).

Poznámka: Lemma 2 říká, že rovnice je splněna v bodě slepení. Zaručeno, slepím-li spojitě.

Pokračování řešení příkladu 1:

• $y(x) = \begin{cases} -(x+c)^2 & x \le c \\ 0 & x \ge c \end{cases}$ je řešením $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$ ← spojité slepení

• $y(x) = \begin{cases} (x+c)^2 & x > -c \\ 0 & x \le -c \end{cases}$ — " —

↖ Obě řešení jsou zjevně maximální (def. na celém $\mathbb{R}$).
Jsou všechna ??

<u>Tvrzení 3</u> (o jednoznačnosti): Jsou-li f a g spojité v Ω, pak k větvení může dojít pouze v bodech, v nichž g' neexistuje nebo není spojitá a zároveň $g = 0$.

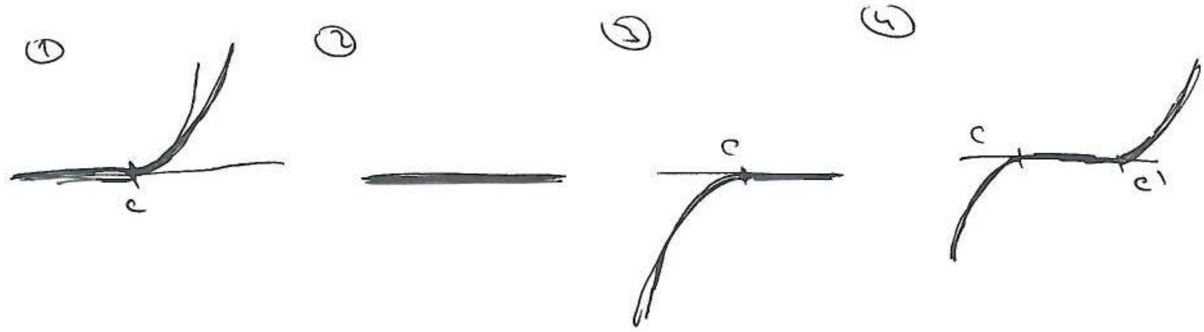
Dokončení řešení příkladu 1:

• Rovnice $y' = 2\sqrt{y}$. ~~Sada řešení $y_c(x) = (x-c)^2$, $x \in (c,\infty)$~~

• Sada řešení $y_c(x) = (x-c)^2$, $x \in (c,\infty)$ zjevně vyplňuje horní polorovinu $\Omega = \{(x,y);\, y > 0\}$
... bodem (x_0, y_0) prochází řešení, kde $c = x_0 - \sqrt{y_0}$
f i g spojité, $g \neq 0$ $\Rightarrow$ žádná jiná řešení nemohou být.

• Sada řešení $y_c(x) = -(x-c)$ $\quad x \in (-\infty, c)$

Možnosti:



⇝ Všechna maximální řešení vyplní celou $\mathbb{R}^2$ rovinu ...
(v tomto případě).

<u>Motiv 1</u>: Nalezněte alespoň 2 maximální řešení $y' = 2\sqrt{|y|}$ s počáteční podmínkou $y(4) = 4$.

• ⇝ $\underline{c} = x_0 - \sqrt{y_0} = 4 - 2 = \underline{2}$

Kuchařka hledání maximálních řešení rovnice (1):

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce f. Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, potom funkce $y \equiv c$ na libovolném intervalu z 1. kroku je stacionární řešení rovnice (1).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 2. kroku. Tedy f je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Hledáme řešení (1), která jsou definována někde v I a mají hodnoty v J. Je-li y takové řešení, pak pro něj platí: $\dfrac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$

   Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k $\frac{1}{g}$ na J. Potom $\exists$ konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí
   $$G(y(x)) = F(x) + c$$
   na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině $\{x \in I,\ F(x) + c \in G(J)\}$

   Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar
   $y(x) = G^{-1}(F(x) + c)$ kde G^{-1} je inverzní funkce k G.
   Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď to rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme" všechna maximální řešení rovnice (1).

Příklad 2: Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2x(1+y^2)$

1. $f(x) = 2x \quad \dots \quad I = \mathbb{R}$

2. $g(y) = 1+y^2 \quad g(y) > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} \quad \leadsto$ žádné stacionární řešení

3. $J = \mathbb{R}$

4. $\Omega = I \times J \dots f$ spojitá, g spojitá $\neq 0$ na Ω ... jen 1 interval pro x a 1 interval pro y

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 2x\,dx \leadsto \operatorname{arctan} y = x^2 + c$$

5. $G(y) = \operatorname{arctan}(y) \dots$ zobrazuje J na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \leadsto x^2 + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x^2 \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$

- $c \leq -\frac{\pi}{2} \leadsto x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} - c}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - c}\right)$ a $x \in \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}\right)$
- $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \leadsto x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}\right)$
- $c \geq \frac{\pi}{2}$ řešení neexistuje

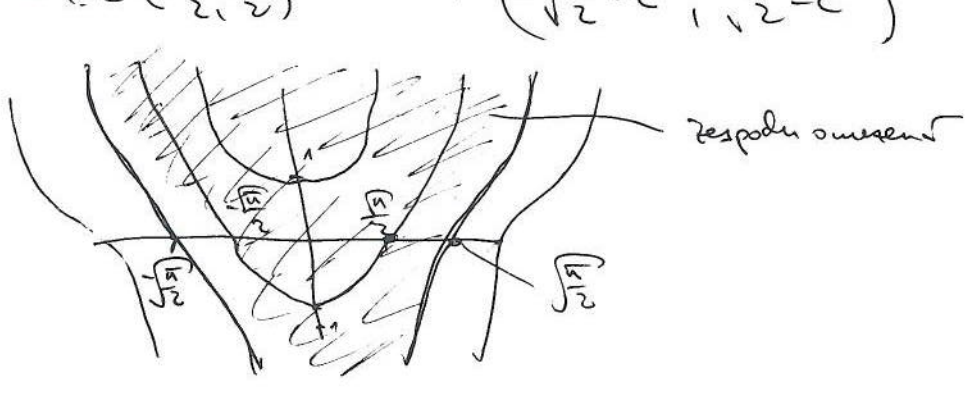
$\longrightarrow y = \tan(x^2 + c)$

6. ~~Ale~~ V krajních bodech intervalů $\pm\sqrt{\pm\frac{\pi}{2} - c}$ je $\lim y(x) = \pm\infty$
$\leadsto$ nalezená řešení nelze prodloužit $\longrightarrow$ jsou maximální

~~Ale~~ Tvrzení 3 (o jednoznačnosti) $\leadsto$ našli jsme všechna řešení

$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \dots$ prochází jedno z řešení: $y = \tan(x^2 + c)$,
kde $c = \operatorname{arctan}(y_0) - x_0^2$
definovaná na intervalech:

- $c \leq -\frac{\pi}{2},\ x_0 < 0 \quad : \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} - c}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - c}\right)$
- $c \leq -\frac{\pi}{2},\ x > 0 \quad : \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}\right)$
- $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad : \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}\right)$



Úloha 1 Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = |y|$

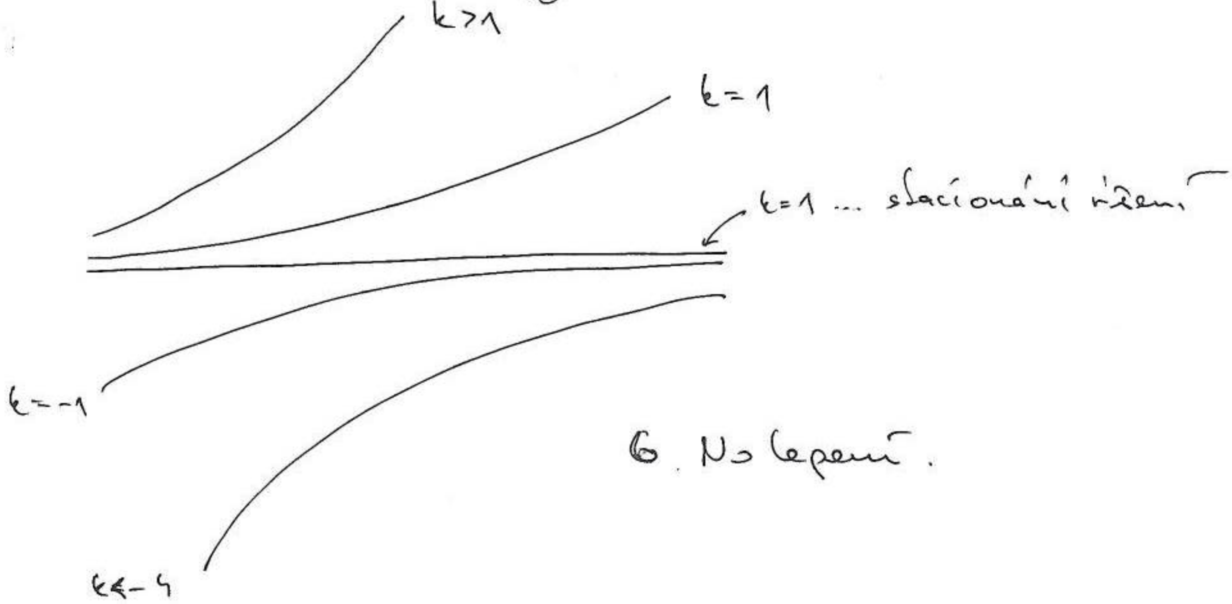
1. $f(x) = 1 \quad \dots \quad I = \mathbb{R}$
2. $g(y) = |y| \quad g(y) = 0$ pro $y = 0 \quad \to$ stacionární řešení: $y = 0$
3. $J_1 = (-\infty, 0)\,,\ J_2 = (0, \infty)$
4. • $I \times J_1 \equiv \Omega_1$: $\displaystyle\int \frac{dy}{|y|} = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| = x + c \to y = -e^{-(x+c)}$

   • $I \times J_2 \equiv \Omega_2$: $\quad +\ln|y| = x + c \to y = e^{x+c}$

5. ~~...~~ Ω_1: $G(y) = -\ln(-y)$ zobrazuje J_1 na $\mathbb{R} = I$

   Ω_2: $G(y) = \ln(y) \quad J_2$ na $\mathbb{R} = I$

$$\left.\begin{array}{l} y = -e^{-c}e^{-x} \quad \dots \underbrace{-e^{-c}}_{<0} e^{-x} \\ y = e^{c}e^{x} \quad \dots \underbrace{e^{c}}_{>0} e^{+x} \end{array}\right\} \quad y(x) = k\, e^{x\,\mathrm{sgn}(k)} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ k \in \mathbb{R} \end{array}$$



6. Nalepení.

∀ počáteční podmínka (x_0, y_0) → jedno maximální řešení.

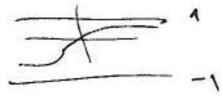
Úloha 2 Nalezněte $\forall$ max. řešení $y' = 1 - y^2$

1. $f(x) = 1$ ... $I = \mathbb{R}$
2. $g(y) = 1 - y^2$, $g(y) = 0$ pro $y = \pm 1$ ... 2 stacionární řešení: $y = -1$, $y = 1$
3. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 1)$, $J_3 = (1, \infty)$
4. $\int \frac{dy}{1-y^2} = \int dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = x + c \quad c \in \mathbb{R}$

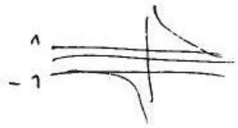
$$\underbrace{\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right|}_{\text{arccoth}(y)\ |y|>1,\ \ \text{arctanh}(y)\ |y|<1}$$

$I \times J_1$ a $I \times J_3$: $y = \text{cotgh}(x+c)$

$I \times J_2$: $y = \text{tgh}(x+c)$



$x \in \mathbb{R}$

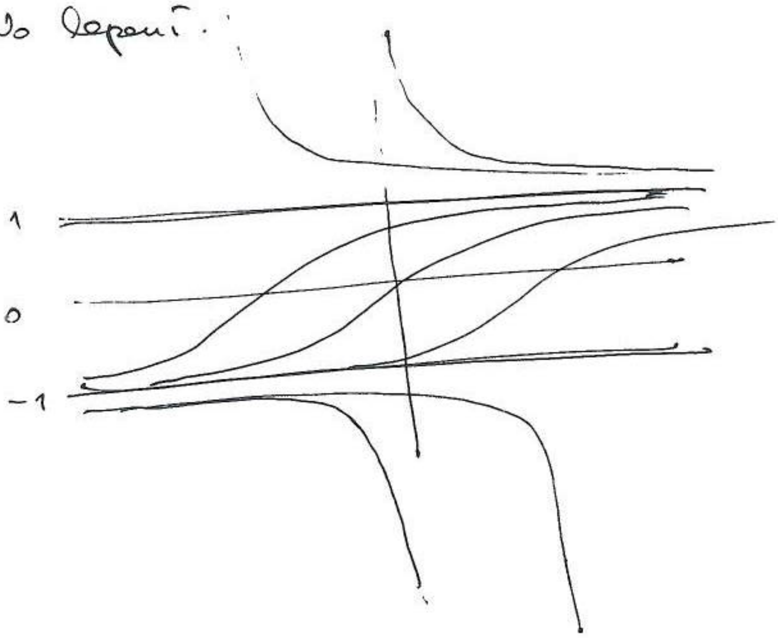


5. $\rightsquigarrow$ $y(x) = \pm 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$y(x) = \tanh(x+c) \quad c \in \mathbb{R} \ x \in \mathbb{R}$

$y(x) = \text{cotanh}(x+c) \quad c \in \mathbb{R}$ ... $x + c < 0$ ... $x \in (-\infty, -c)$; $x + c > 0$ ... $x \in (-c, +\infty)$

6. No lepení.



Úloha 3 Nalezněte všechna max řešení $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$

1. $f(x) = 1$ ... $I \in \mathbb{R}$

2. $g(y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$ $\quad g(y) = 0$ pro $y = 0$

$\rightarrow$ stacionární řešení $\quad y(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$

3. $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, +\infty)$

4. $\int \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \, dy = y^{\frac{2}{3}} = x + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\rightarrow x > -c$

5. $I \times J_1 \qquad y = -\sqrt{(x+c)^3}$

$I \times J_2 \qquad y = +\sqrt{(x+c)^3}$

6. Lze slepit se stacionárním řešením v $x = -c$:

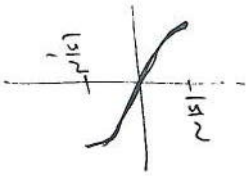
- $y = 0$
- $y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -c) \\ \pm\sqrt{(x+c)^3} & x \in \langle -c, \infty) \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$

Úloha 4 Najděte $\forall$ max. řešení $y' = \sqrt{1-y^2}$

1. $f(x) = 1$ ... $I = \mathbb{R}$
2. $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ $D_g = [-1, 1]$, $g(y) = 0$ pro $y = \pm 1$

$\rightarrow$ 2 stacionární řešení $y = \pm 1$

3. $J = (-1, 1)$
4. na $I \times J$: $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y = x + c \qquad c \in \mathbb{R}$
5. $\rightarrow y = \sin(x+c) \in (-1, 1)$



$x + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$

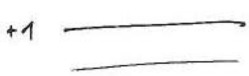
6. lepení $\rightarrow$ maximální:

- Triviální max. řešení: $\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right\}$ stacionární

- Lepit lze jen tam, kde $y = \pm 1$:

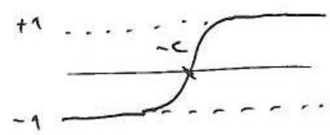
$$y(x) = \begin{cases} \sin(x+c) & \dots \ x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right) \\ -1 & \dots \ x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2} - c\right] \\ +1 & \dots \ x \in \left[\frac{\pi}{2} - c, +\infty\right) \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}$$

1



2

3



① $y' = \alpha y (P_m - y) \quad y(0) = y_0 \in (0, P_m)$ ... Cauchyova úloha

1. $f(x) = \alpha$ ... $I = \mathbb{R}$

2. $g(y) = y(P_m - y) \quad D_g = \mathbb{R} \quad g = 0$ pro $y = 0$ a $y = P_m$ ... stac. řešení

3. $J_1 = (-\infty, 0) \quad \underbrace{J_2 = (0, P_m)}_{\nearrow \text{poč. podm.}} \quad J_3 = (P_m, \infty)$

4. $$\frac{dy}{y(P_m - y)} = \alpha\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y(P_m-y)} = \frac{1}{P_m} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{P_m - y}\right) dy = \frac{1}{P_m} \ln|y| - \ln|P_m - y|$$

$$= \frac{1}{P_m} \ln \frac{y}{P_m - y} \quad \Big(\text{na } (0, P_m)\Big) = \alpha(x + c)$$

5.

$$\to \ln \frac{y}{P_m - y} = P_m \alpha (x + c)$$

$$\frac{y}{P_m - y} = e^{P_m \alpha (x+c)} = K e^{P_m \alpha x}$$

$$y\left(1 + K e^{P_m \alpha x}\right) = P_m K e^{P_m \alpha x}$$

$y(0) = y_0$

$$y = \frac{P_m K e^{P_m \alpha x}}{1 + K e^{P_m \alpha x}}$$

$$\frac{y_0}{P_m - y_0} = K e^0 = K$$

$$y = \frac{P_m y_0 e^{P_m \alpha x}}{P_m - y_0 + y_0 e^{P_m \alpha x}}$$

$$y(x) = \frac{P_m y_0}{y_0 + (P_m - y_0) e^{-P_m \alpha x}} \quad \& \quad y(0) = y_0 \quad \& \quad y(x \to \infty) = P_m$$

② $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ... obecné řešení → maximální řešení

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ ... $I = (0,\infty)$

2. $g(y) = \sqrt{y}$ $\quad D_g = [0,\infty)$ $\quad g(y) = 0$ pro $y = 0$ ... stac. řešení

3. $J = (0,\infty)$

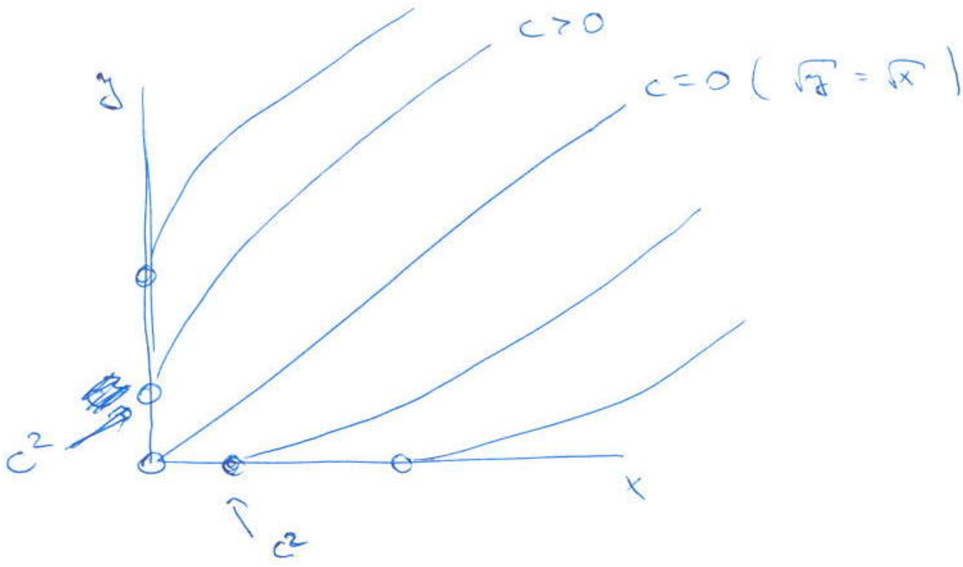
4. $\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 2c$$

$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$

5. na $(0,\infty)\times(0,\infty)$: $\quad y = (\sqrt{x}+c)^2$

→ $\sqrt{y} > 0$ → $\sqrt{x} + c > 0$ $\quad c \geq -\sqrt{x}$



6. Maximální řešení:
- stacionární: $y(x) = 0$ $\quad x \in (0,\infty)$
- $y(x) = (\sqrt{x}+c)^2$ $\quad c \geq 0$ $\quad x \in (0,\infty)$
- $y(x) = \begin{cases} (\sqrt{x}+c)^2 & c < 0 \quad x \in (c^2,\infty) \\ 0 & x \in (0, c^2] \end{cases}$

$\forall (x,y) \in I \times J$ najdeme právě jedno max. řešení (a jemu odpovídající c)

(3) Obecné řešení $y' = \frac{1-x}{y}$

1. $f(x) = 1-x \rightsquigarrow I = \mathbb{R}$

2. $g(y) = \frac{1}{y}$ $\quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad g(y) \neq 0 \ \forall y \rightarrow$ no stac. řešení

3. $J_1 = (-\infty, 0)$ $\quad J_2 = (0, \infty)$

4. $y y' = 1 - x$

$$\int y\,dy = \frac{y^2}{2} = \int (1-x)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\tilde{c}}{2} \qquad c = 1 + \tilde{c}$$

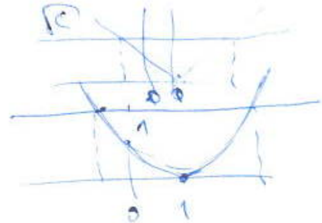
$$y^2 = -x^2 + 2x + \tilde{c} = -(x-1)^2 + c$$

$$y^2 > 0 \Rightarrow -(x-1)^2 + c > 0$$

$$c > (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\sqrt{c} > |x-1|$$

$$\rightarrow x \in (1-\sqrt{c}, 1+\sqrt{c})$$

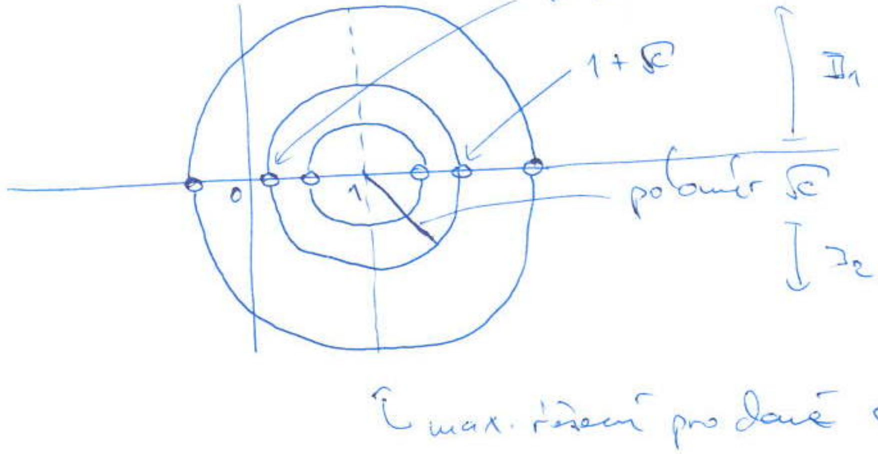


$y^2 + (x-1)^2 = c$ ... kružnice s poloměrem $\sqrt{c}$

5.

$I \times J_1$ $(-\infty, 0)$: $\quad y = -\sqrt{c-(x-1)^2}$ $\quad$ pro $x \in (1-\sqrt{c}, 1+\sqrt{c})$

$I \times J_2$ $(0, \infty)$: $\quad y = +\sqrt{c-(x-1)^2}$



↳ max. řešení pro dané c

$\forall$ bod z $I \times J_1$ a $I \times J_2$ najdeme právě jedno max. řešení (a jemu odpovídající c)

(4) $y' = -\dfrac{e^x}{2y(1+e^x)}$ → obecné řešení

1. $f(x) = -\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ... $D_f = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$

2. $g(y) = \dfrac{1}{2y}$ $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$

$g(y) \neq 0$ $\forall y \in D_g$ ... no stac. řešení

3. J_1, J_2

4. $2yy' = -\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$\int 2y\,dy = y^2 = -\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\ln\underbrace{(1+e^x)}_{>0} + c$

$y^2 = c - \ln(1+e^x)$

5. $y^2 > 0 \Rightarrow c > \ln\underbrace{(1+e^x)}_{>1}$ → $e^c > 1+e^x$ → $e^c - 1 > e^x$

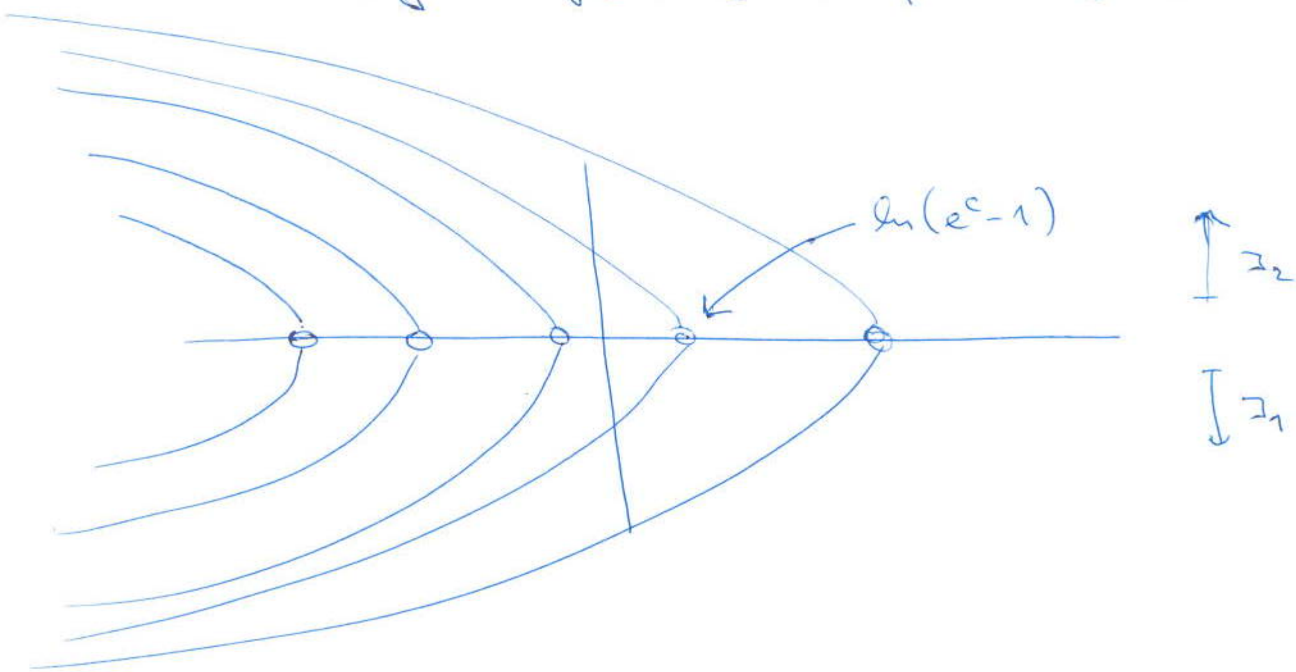
→ $\ln\underbrace{(e^c-1)}_{c>0} < x$

$\hookrightarrow = c > 0$ ✓

→ pro $c > 0$ pevné maximální řešení:

$y = -\sqrt{c - \ln(1+e^x)}$ pro $x \in (-\infty, \ln(e^c-1))$

$y = +\sqrt{c - \ln(1+e^x)}$ pro $x \in (-\infty, \ln(e^c-1))$



(5) $y' = \sqrt{1-y^2}$

1. $f(x) = 1 \quad \to \quad I = \mathbb{R}$
2. $g(y) = \sqrt{1-y^2} \qquad g(y) = 0$ pro $y = \pm 1$ ... dvě stacionární řešení
3. $D_g = [-1, +1] \quad \to \quad J = (-1, 1)$
4. $\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1$

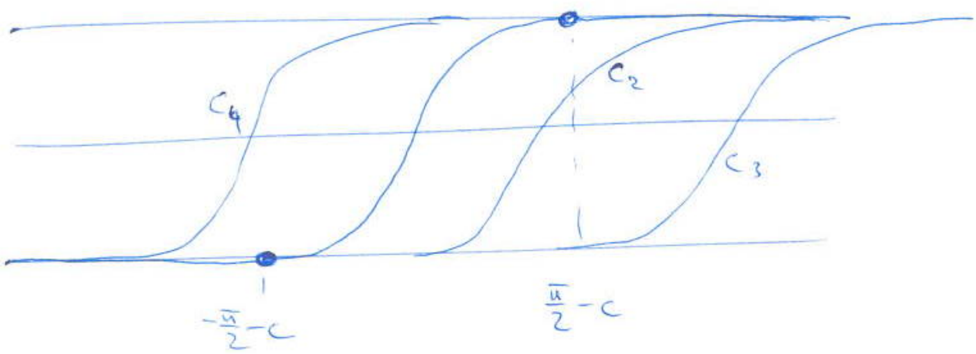
$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y = \int 1\,dx = x + c$$

$$\arcsin y = x + c \quad \dots \quad x + c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right)$$

5. Pro $c \in \mathbb{R}$ pevné, maximální řešení je

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{\pi}{2} - c \\ \sin(x+c) & x \in \left(-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right) \\ +1 & x \geq \frac{\pi}{2} - c \end{cases}$$



$\to$ každým bodem $(x, y) \in I \times J$ prochází právě jedno maximální řešení (odpovídající c)

⑥ $y' = \dfrac{y\ln y}{\sin x}$

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}\ k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $I_k = (k\pi, (k+1)\pi)$

2. $g(y) = y\ln y$ $g(y) = 0$ pro $y = 1$ (a $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 0$)

3. $J_1 = (0,1)$, $J_2 = (1,\infty)$

4. $\dfrac{y'}{y\ln y} = \dfrac{1}{\sin x}$

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \left| \begin{array}{l} \ln y = u \\ \frac{dy}{y} = du \end{array} \right| \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\ln y|$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} \quad \left| \begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = u \\ \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = du \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$\underline{\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c}$$

5. $\underline{\text{na } J_2 = (1,\infty)}$

$\ln\ln y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$

$\ln y = e^c\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = K\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

$y = e^{K\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}$

$\underline{\text{na } J_1 = (0,1)}$

$\ln(-\ln y) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$

$\ln y = -e^c\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = -K\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

$y = e^{-K\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}$

- na $I_k \times J_2$ k sudé

  $y = e^{K\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$
- na $I_k \times J_2$ k liché

  $y = e^{-K\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$
- na $I_k \times J_1$ k sudé

  $y = e^{-K\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$
- na $I_k \times J_1$ k liché

  $y = e^{+K\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

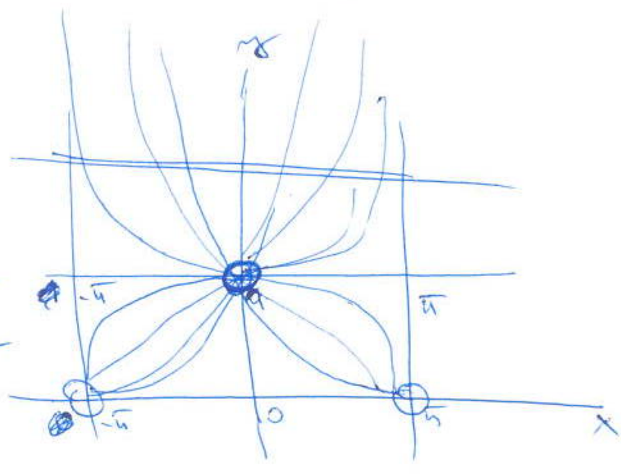
$K = e^c > 0$ $(c \in \mathbb{R})$

8 $x \in I_k = (k\pi, (k+1)\pi)$

$\frac{x}{2} \in \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$k=0$ ... $(0,\frac{\pi}{2})$ ... $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > 0$ ... k sudé

$k=1$ ... $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ... $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 0$ ... k liché



Nelze slepit, neboť $x \neq k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

(7) $y' = -\dfrac{2x\sqrt{1-y^2}}{y}$

1. $f(x) = -2x \quad D_f = \mathbb{R} \; \dots \; I = \mathbb{R}$

2. $g(y) = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad D_g = [-1,1] \setminus \{0\} \quad g(y) = 0$ pro $y = \pm 1$ … stac. řešení

3. $J_1 = (-1, 0), \quad J_2 = (0,1)$

4. $\dfrac{y' y}{\sqrt{1-y^2}} = -2x$

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \;\left|\; \begin{array}{l} 1-y^2 = t \\ -2y\,dy = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -u^{1/2} = -\sqrt{1-y^2} = \int -2x\,dx = -x^2+c$$

$\rightarrow \sqrt{1-y^2} = x^2 - c$

$\sqrt{1-y^2} > 0 \Rightarrow x^2 - c > 0 \Leftrightarrow x^2 > c$ $\quad |x| > \sqrt{c}$

$\hookrightarrow x \in \mathbb{R}$ pro $c < 0$ a $|x| > \sqrt{c}$ pro $c \geq 0$

5. Fix c: $1 - y^2 = (x^2 - c)^2$

$y^2 = 1 - (x^2-c)^2$

therefore $1 - (x^2-c)^2 > 0$

$1 > (x^2-c)^2 \;\; \& \;\; x^2 > c$

$1 > x^2 - c$

$1 + c > x^2 \; \dots \; c > -1$

$\sqrt{1+c} > |x| \; \dots \; x \in (-\sqrt{1+c}, \sqrt{1+c})$ if $-1 < c < 0$

$x \in (-\sqrt{1+c}, \sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, \sqrt{1+c})$ if $c \geq 0$

Na $I \times J_1$: $y = -\sqrt{1-(x^2-c)^2}$

Na $I \times J_2$: $y = +\sqrt{1-(x^2-c)^2}$

$x \in (-\sqrt{1+c}, \sqrt{1+c})$ if $-1 < c < 0$

$x \in (-\sqrt{1+c}, -\sqrt{c}) \cup (\sqrt{c}, \sqrt{1+c})$ if $c \leq 0$

⑧ $y' \operatorname{cotg} x + y = 2$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Cauchyova úloha

$y' = \frac{2-y}{\operatorname{cotg} x}$

1. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ ... $x \neq k\pi$, s přihlédnutím k IC nás zajímá $\underline{I = (0,\pi)}$

2. $g(y) = 2-y$ $g(y) = 0$ pro $y = 2$ ... stac. řešení

3. $\underline{J_1 = (-\infty, 2)}$, $J_2 = (2, \infty)$
IC.

4. $\frac{y'}{2-y} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$

$\int \frac{dy}{2-y} = -\ln|2-y| = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \left| \begin{matrix} \cos x = u \\ -\sin x\,dx = du \end{matrix} \right| = -\int \frac{du}{u} = -\ln|\cos x| + \tilde{c}$

$\ln|2-y| = \ln|\cos x| - \tilde{c} = \ln|\cos x| + c$
$c = -\tilde{c}$

5. na $J_1 = (-\infty, 2)$: $\ln(2-y) = \ln|\cos x| + c$

$2-y = e^c|\cos x| = K\cos x$ $c \in \mathbb{R}, K > 0$

$y = 2 - K|\cos x|$

na $J_2 = (2,\infty)$ $\ln(y-2) = \ln|\cos x| + c$

$y - 2 = e^c|\cos x|$

$y = 2 + K|\cos x|$

Počáteční podmínka: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \longrightarrow \underline{1} = 2 - K\cos\left|\frac{\pi}{4}\right| = \underline{2 - K\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$1 = K\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow K = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

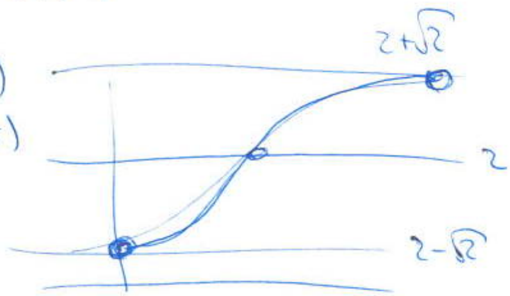
$\Rightarrow$ na $I \times J_1$: $y = 2 - \sqrt{2}|\cos x|$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\hookrightarrow y = 2 - \sqrt{2}\cos x$ pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = 2 + \sqrt{2}\cos x$ pro $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\Rightarrow$ na $I \times J_2$: $y = 2 + K\cos x$ pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$y = 2 - K\cos x$ pro $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$



$\hookrightarrow$ Slepil:

⑨ $y' = -\frac{x}{y}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

1. $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_f = (-1,1) = I$

2. $g(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ $g(y) = 0$ pro $y = \pm 1$ ... stac. řešení

3. $J_1 = (-1,0)$, $J_2 = (0,1)$

4. $\frac{y y'}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \left| \begin{array}{l} 1-y^2 = u \\ -2y\,dy = du \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -u^{1/2} = -\sqrt{1-y^2} = +\sqrt{1-x^2} - c$

$\sqrt{1-y^2} = c - \sqrt{1-x^2}$

Musí platit $c - \sqrt{1-x^2} \in [0,1) \rightarrow \sqrt{1-x^2} \in (c-1, c]$

Odtud $x \in (-1, -\sqrt{1-c^2})$ nebo $x \in (\sqrt{1-c^2}, 1)$ pro $c \in (0,1)$

a $x \in (-\sqrt{1-(c-1)^2}, \sqrt{1-(c-1)^2})$ pro $c \in [1,2)$

Podmínka $y \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1-(c-1)^2$ je splněna,

lepení v bodě $y = \pm 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - c^2$

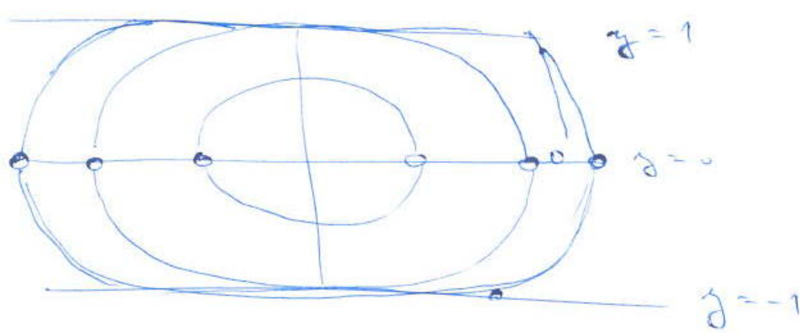
5.

$c \in (0,1)$

$$y(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2} & x \in (-1, -\sqrt{1-c^2}) \\ \pm 1 & x \in (-\sqrt{1-c^2}, \sqrt{1-c^2}) \\ \pm\sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})} & x \in (\sqrt{1-c^2}, 1) \end{cases}$$

$c \in (1,2)$

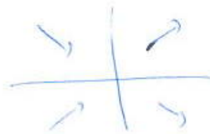
$$y(x) = \pm\sqrt{1-(c-\sqrt{1-x^2})^2} \qquad x \in -\sqrt{1-(c-1)^2}, \sqrt{1-(c-1)^2}$$



(10) $y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$

2. $g(y) = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$ $\quad g(y) \neq 0 \quad \forall y \neq 0$



3. $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$

4. $\frac{y y'}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{x}$

$\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, dy = \sqrt{1+y^2} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| - c + 1$ $\qquad \underline{\sqrt{1+y^2} = \ln|x| + 1 - c}$

5. Musí plt $\ln|x| + \cancel{1} - c \geq \cancel{1}$ $\rightarrow \ln|x| \geq +c$

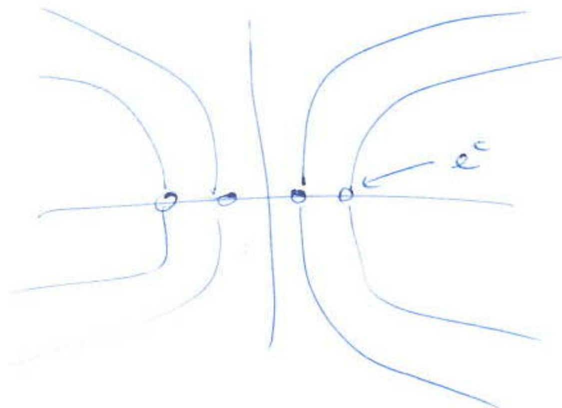
$|x| \geq e^c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -e^c) \vee x \in (e^c, \infty)$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$y^2 + 1 = (\ln|x| + 1 - c)^2$

$y^2 = (\ln|x| + 1 - c)^2 - 1$

$y = \pm\sqrt{(\ln|x| + 1 - c)^2 - 1}$



(11) $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$ $\quad y(0) = 1$ $\quad$ Cauchyova úloha

1. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ $\quad I_1 = (-\infty, -1)$, $\underbrace{I_2 = (-1, 1)}_{\text{I.C.}}$, $I_3 = (1, +\infty)$

2. $g(y) = y^2$ $\quad g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ... stacionární řešení

3. $J_1 = (-\infty, 0)$, $\underline{J_2 = (0, +\infty)}$

4. $\frac{y'}{y^2} = \frac{2x}{1-x^2}$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} = \int \frac{2x}{1-x^2}\,dx = -\ln|1-x^2| + c$$

$\rightarrow$ na $I_2 \times J_2 = (-1,1) \times (0, \infty)$ $\quad \frac{1}{y} = \ln(1-x^2) - c$

$\rightarrow$ poč. podmínka: $y(0) = 1 \rightarrow 1 = \ln 1 - c \Leftrightarrow c = -1$

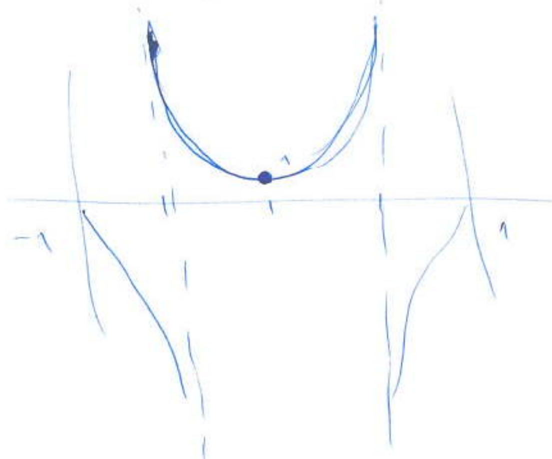
$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\ln(1-x^2) + 1}$ $\quad$ .. $\ln(1-x^2) \neq -1$

$1 - x^2 \neq \frac{1}{e}$

$x^2 \neq 1 - \frac{1}{e}$

$x \neq \pm\sqrt{1-\frac{1}{e}} \approx \pm 0.795$

$x \in \left(-\sqrt{1-\frac{1}{e}}, +\sqrt{1-\frac{1}{e}}\right)$



(12) Nalezněte všechna maximální řešení $y'(2-e^x) = -3e^x \operatorname{tg} y \cos^2 y$ procházející bodem $(0, \frac{\pi}{4})$ splňující

a) $y(\ln 3) = 0$ b) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{4}$ c) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{2}$

$\ln 3 \doteq 1{,}1$

1. $f(x) = -\frac{3e^x}{2-e^x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ $I_1 = (-\infty, \ln 2)$, $I_2 = (\ln 2, \infty)$

2. $g(y) = \operatorname{tg} y \cos^2 y$ $g(y) = 0$ pro $\underbrace{\tan y = 0}_{y = k\pi}$ a $\underbrace{\cos y = 0}_{y = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

→ stac. řešení $y = k\pi$ →

3. $J_{k1} = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi)$ $J_{k2} = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

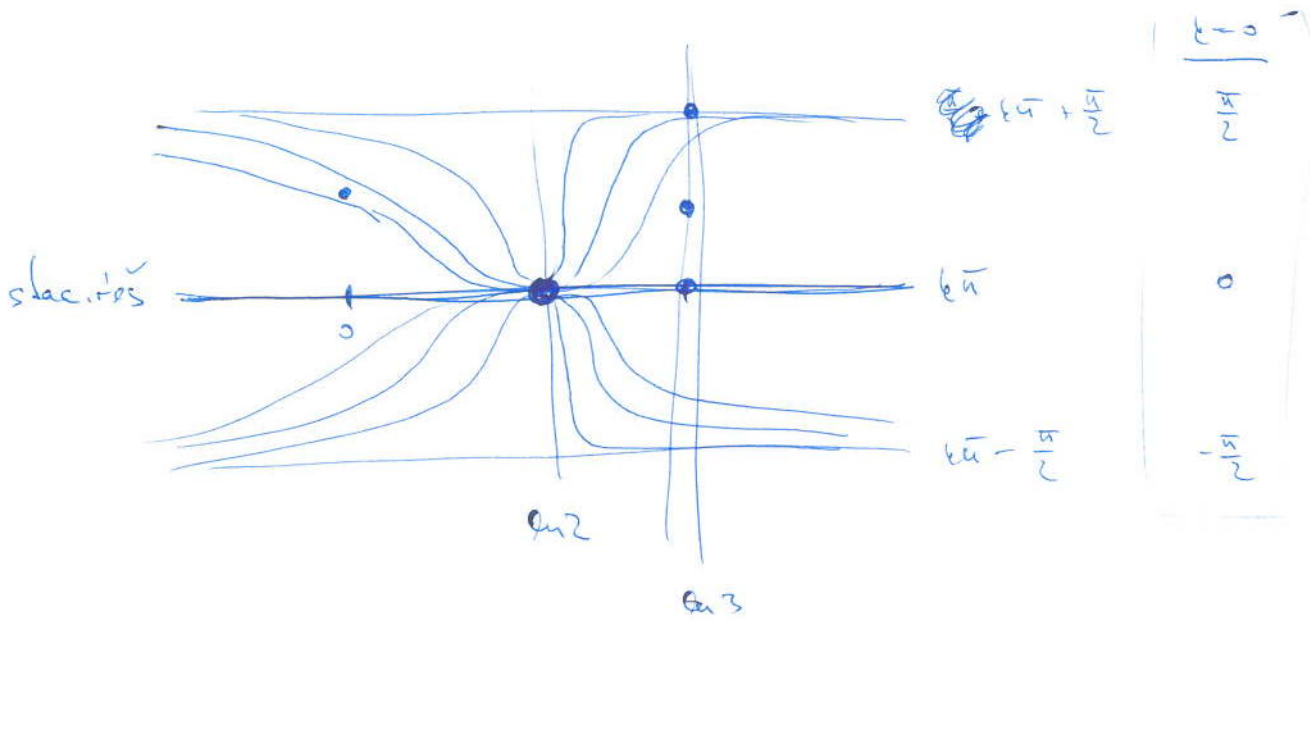
4. $\frac{y'}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = -\frac{3e^x}{2-e^x}$

$\int \frac{dy}{\operatorname{tg} y \cos^2 y} = \ln|\operatorname{tg} y| = \int \frac{-3e^x}{2-e^x} = 3\ln|2-e^x| + c$

$\ln|\operatorname{tg} y| = 3\ln|2-e^x| + c$ $\quad * \ |z| = \frac{z}{\operatorname{sgn}(z)}$

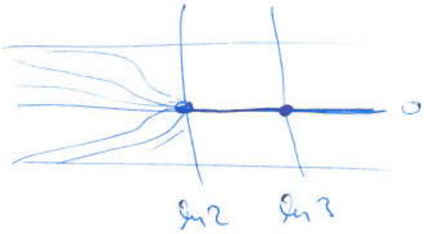
$|\operatorname{tg} y| = |2-e^x|^3 e^c \rightsquigarrow \operatorname{tg} y = \operatorname{sgn}(\tan y)\,|2-e^x|^3 e^c$

$y = k\pi + \operatorname{arctan}\left(\operatorname{sgn}(\operatorname{tg} y)\, e^c\, |e^x - 2|^3\right)$

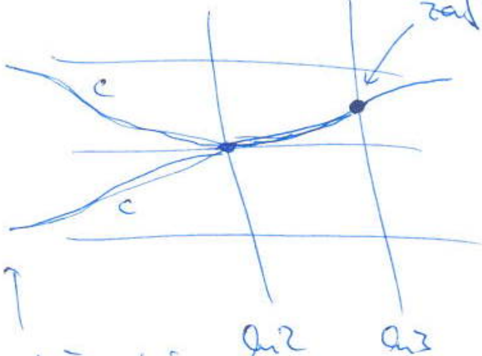


a) $y(\ln 3) = 0$ $\quad \rightarrow \quad y = \cancel{0}\pi + \operatorname{arctan}\left(\operatorname{sgn}(\tan y)\, e^c \,|e^x - 2|^3\right) \quad x \in (-\infty, \ln 2)$, $c \in \mathbb{R}$

$y = 0 \quad x \in [\ln 2, \infty)$



b) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{4}$



zafixuje $\underline{c}$ $\quad \rightarrow \quad |\tan \frac{\pi}{4}| = e^c \,|e^{\ln 3} - 2|^3$

$1 = e^c \, 1^3$

$c = 0$

$\rightarrow \quad |\tan y| = |e^x - 2|^3$

Jen dvě možné volbe

c) $y(\ln 3) = \frac{\pi}{2}$ ... nejde X

(13) Kterými body prochází právě jedno maximální řešení rovnice $xy' - y = 0$?

$\to \; y' = \frac{y}{x}$

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad I_1 = (-\infty, 0),\ I_2 = (0, \infty)$

2. $g(y) = y$ $\quad g(y) = 0$ pro $y = 0$ ... stac. řešení

3. $J_1 = (-\infty, 0),\ J_2 = (0, +\infty)$

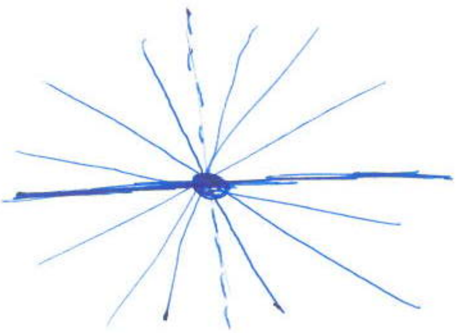
4. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$

$K > 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln K = \ln K|x|$$

$$\ln|y| = \ln K|x| \to |y| = K|x| \to y = \tilde{K}x$$

$\tilde{K} \in \mathbb{R}$



→ Nejde slepit v $x = 0$ neboť výsledná funkce $y(x)$ by neměla $y'(0)$

→ Všemi body kromě ~~[illegible]~~ $y = 0$ & $x \neq 0$

(14) Meteoroid, zemská přitažlivost, vzdálenost h

(16) $y'(x+y) + x - y = 0$ ... homogenní rovnice

$\subset \forall \lambda \neq 0 \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$

$$y' = \underbrace{\frac{y-x}{y+x}}_{=: f(x,y)}$$

$\rightarrow z(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \rightarrow \quad y = xz$

$y' = z + xz'$

$\rightarrow (z + xz')(x + xz) + x - xz = 0$

$x\left[(z+xz')(1+z) + 1 - z\right] = 0 \quad \cancel{(x \neq 0)}$

Pro $\underline{x \neq 0}$ $\quad xz' = \frac{z-1}{z+1} - z = \frac{\cancel{z} - 1 - z^2 - \cancel{z}}{1+z} = -\frac{1+z^2}{1+z}$

$\rightarrow z' = -\frac{1}{x} \frac{1+z^2}{1+z}$ ... separované proměnné $z' = f(x)g(z)$

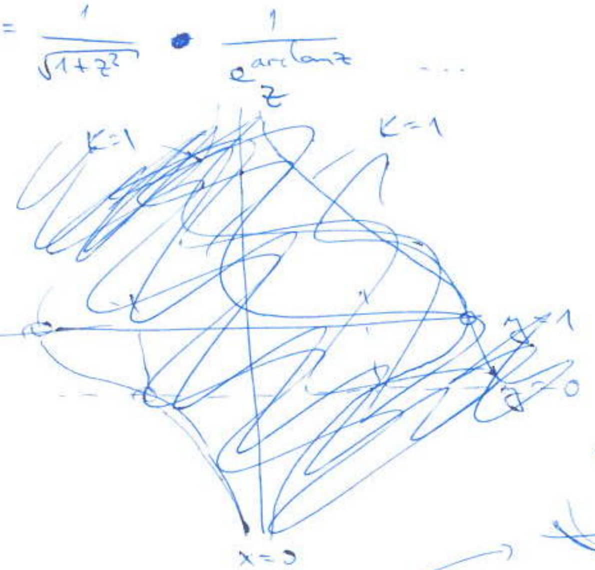
1. $f(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad I_1 = (-\infty, 0),\ I_2 = (0, \infty)$
2. $g(z) = \frac{1+z^2}{1+z}$ $\quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad \underline{J_1 = (-\infty, -1),\ J_2 = (-1, \infty)}$
3. $\rightarrow g(z) \neq 0 \ \forall z \in D_g$ ... nestac. řešení
4. $\int \frac{1+z}{1+z^2}\, dz = \int \frac{1}{1+z^2}\, dz + \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1+z^2}\, dz = \arctan z + \frac{1}{2} \ln 1 + z^2$

$\int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c = -\ln|x| - \ln K = -\ln K|x|$ $\quad \underline{K > 0}$

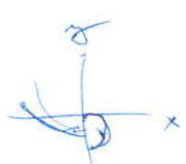
$\rightarrow \arctan z + \ln \sqrt{1+z^2} = -\ln K|x|$

5. $\rightarrow$ vyjádři $x = x(z)$: $\quad K|x| = \exp\{-\arctan z - \ln\sqrt{1+z^2}\}$

$K|x| = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \frac{1}{e^{\arctan z}}$ ...



$K|x| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{e^{\arctan \frac{z}{x}}}$



(17) $y' = \frac{x+2y}{x}$ $x \neq 0$, pro $x \neq 2y$ homogenní rovnice

$\to y = xz$, $y' = z + xz'$

$\to z + xz' = \frac{x + 2xz}{x} = 1 + 2z$

$xz' = 1 + z$

$z' = \frac{1+z}{x}$ ... separované proměnné

1. $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$

2. stacionární řešení $z = -1$

3. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, \infty)$

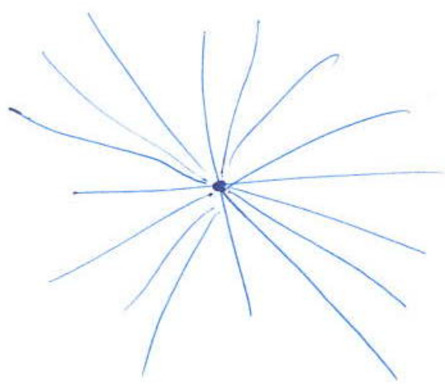
4. $\int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z| = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln K = \ln K|x|$ $K > 0$

$\ln|1+z| = \ln K|x|$

$|1+z| = K|x|$

$1+z = -Kx$ $z = -1 - Kx$	$1+z = Kx$ $z = -1 + Kx$ $z = -1$
$-(1+z) = Kx$	$-(1+z) = Kx$ $z = -1 - Kx$

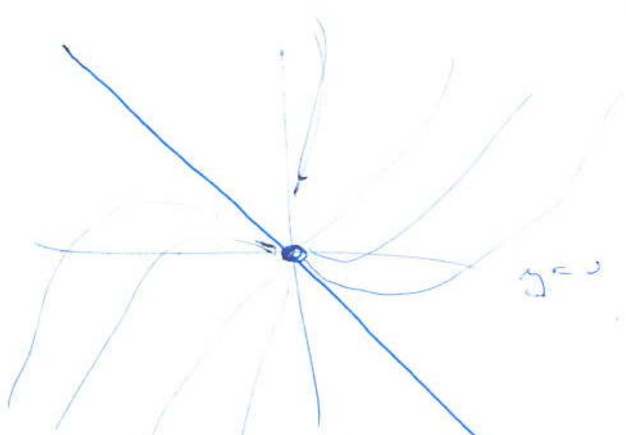
$x = 0$



$y = xz$

$y = -x - Kx^2$	$y = -x + Kx^2$
$y = -x + Kx^2$	$y = -x - Kx^2$

$x = 0$



(18) $y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$ ... homogenní rovnice

$y = xz \qquad y' = z + xz'$

$xz' + \cancel{z} = \cancel{z} - e^{z}$

$z' = -\frac{e^{z}}{x}$ ... separovaná

1. $x \neq 0$
2. no stac. řešení
3. $y \in \mathbb{R}$
4. $-e^{-z} z' = \frac{1}{x} \rightarrow \int -e^{-z} dz = e^{-z} = \ln K|x| \quad K>0$

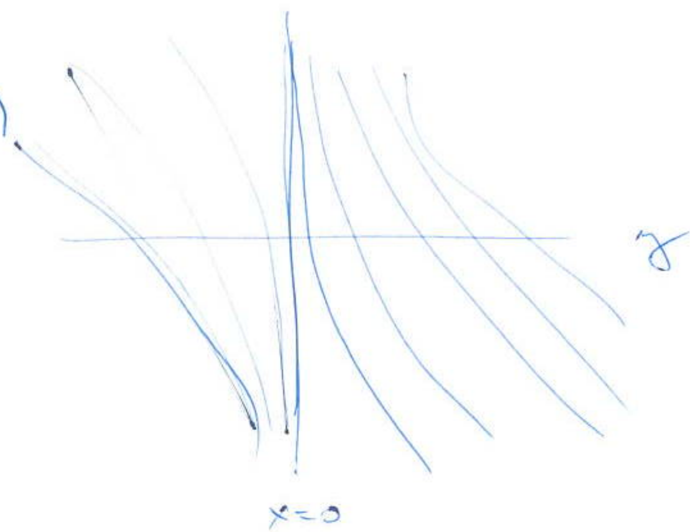
$\rightarrow \; -z = \ln \ln (K|x|)$

$y = -x \ln \ln (K|x|)$

$\ln K|x| > 0$

$K|x| > 1$

$|x| > \frac{1}{K}$



(19) $y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$ .. homog

$\downarrow$

$y = xz$

$xz' + z = z \cos \ln z \qquad z > 0$

$xz' = z(\cos(\ln z) - 1) \qquad x \neq 0$

$z' = \frac{1}{x} z(\cos \ln z - 1)$

$$\int \frac{dz}{z(\cos \ln z - 1)} = \left| \begin{array}{l} \ln z = u \\ \frac{dz}{z} = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{\cos u - 1} \left| \begin{array}{l} v = \operatorname{tg} \frac{u}{2} \\ du = \frac{dv}{1+v^2} \\ \cos u = \frac{1-v^2}{1+v^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1-v^2}{1+v^2} - 1} \frac{dv}{1+v^2} = \int \frac{dv}{\cancel{1}-v^2-\cancel{1}-v^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2} = +\frac{1}{2v} =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\ln z}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{cotan}\left(\frac{\ln z}{2}\right) = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c = \ln K|x|$$

$K > 0$

$\operatorname{cotan} \frac{\ln z}{2} = 2 \ln K|x|$

$\frac{\ln z}{2} = \operatorname{arccotg}(2 \ln K|x|)$

$\ln z = 2 \operatorname{arccotg}(2 \ln K|x|)$

$z = \frac{y}{x} = e^{2 \operatorname{arccotg}(2 \ln K|x|)}$

$y = x\, e^{2 \operatorname{arccotg}(2 \ln K|x|)}$

(20) $y' = \dfrac{y + \sqrt{xy}}{x}$ ... homogenní $\qquad x \neq 0$ & $xy \geq 0$

$\rightsquigarrow y = xz$

$xz' + z = \dfrac{xz + \sqrt{xxz}}{x}$

$z' = \dfrac{|x|\sqrt{z}}{x^2}$ ... $x \neq 0 \quad I_1 = (-\infty, 0) \quad I_2 = (0, \infty)$

$z = 0$ stacionární řešení $\quad J = (0, \infty)$

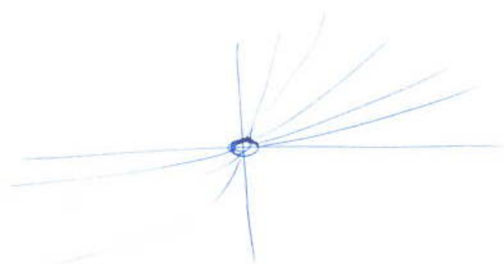
$\dfrac{z'}{\sqrt{z}} = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{x}$ $\quad -\frac{1}{x} \quad x < 0$; $\quad +\frac{1}{x} \quad x > 0$

$\int \dfrac{dz}{z^{1/2}} = 2z^{1/2} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln K|x| \qquad K > 0$

$\sqrt{z} = \frac{1}{2} \ln K|x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$

$z = \left(\frac{1}{2} \ln K|x|\right)^2 = \dfrac{y}{x}$

$y = \frac{1}{4} x \left(\ln K|x|\right)^2$ ... $y = 0$ stac. řešení



(21) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ $x \neq 0$ $y \neq 0$ homogenní rovnice

$y = xz$

$\to xz' + \cancel{z} = \cancel{z} - \frac{1}{z} \to z' = -\frac{1}{xz}$ ... separovatelná proměnná

1. $I_1 = (-\infty, 0)$ $I_2 = (0, \infty)$

2. Nemá stacionární řešení

3. $zz' = -\frac{1}{x}$

4. $\int z\,dz = \frac{z^2}{2} = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + c = \ln\frac{1}{|x|} + c$

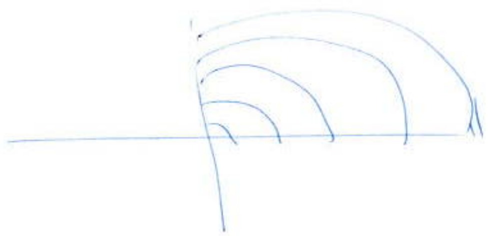
$$z^2 = \ln\frac{1}{x^2} + 2c$$

$$z = \pm\sqrt{\ln\frac{1}{x^2} + 2c} \to y = \pm x\sqrt{\ln\frac{1}{x^2} + 2c}$$

5. $c \in \mathbb{R}$ $\ln\frac{1}{x^2} + 2c > 0$

$$2c > \ln x^2$$

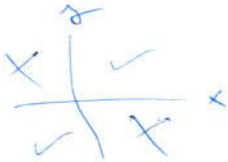
$$c > \ln|x|$$



+ symetrie

(22) $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ $\quad y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy > 0$

≈ 0.6

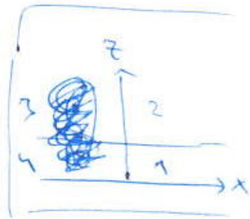


Homogení: $y = xz$

$\rightarrow x z' + \cancel{z} = z(\cancel{1} + \ln z)$

$x z' = z \ln z$

$z' = \frac{z \ln z}{x}$ ... $x \neq 0,\ z \neq 0$ Stac. řešení $z = 1$



$\rightarrow (0,\infty) \times (0,\infty)$

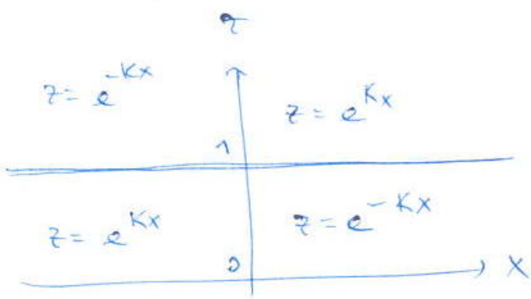
$$\int \frac{dz}{z \ln z} \left| \begin{array}{l} \ln z = u \\ \frac{dz}{z} = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\ln z| = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$\rightarrow \ln|\ln z| = \ln K|x| \quad K > 0 \quad x > 0$

$|\ln z| = K|x| \rightarrow \ln z = \pm K|x| \rightarrow \underline{z = e^{\pm K|x|}}$

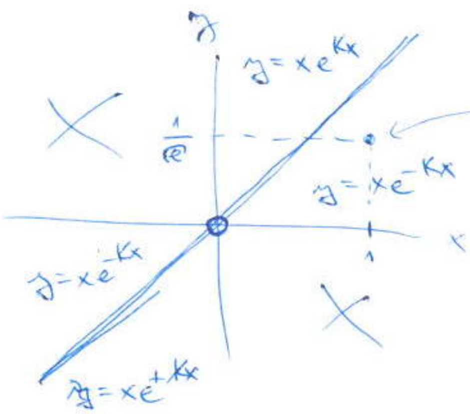
$z = e^{\pm K|x|} = \frac{y}{x} \rightarrow y = x e^{Kx}$

Poč. podm.: $y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ ... $e^{-\frac{1}{2}} = 1 e^{K} \Rightarrow y(x) = x e^{-\frac{x}{2}}$



$\rightarrow y = x e^{\pm K|x|}$

Stac. řešení: $z = 1 = \frac{y}{x} \rightarrow y(x) = x$



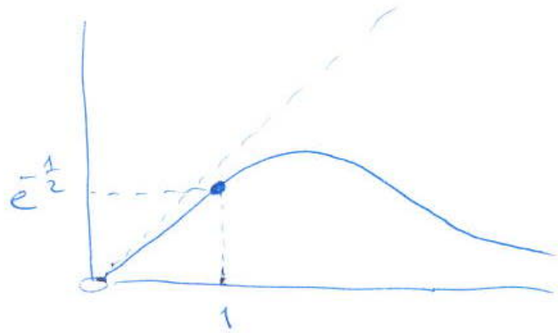
Poč. podm.: $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\frac{1}{\sqrt{e}} = 1 e^{-K 1}$

$e^{-\frac{1}{2}} = e^{-K}$

$K = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \boxed{y = x e^{-\frac{x}{2}}}$



(23) $y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ ... $x_0 - y_0 + 1 = 0$

$x_0 + y_0 - 3 = 0$

$2x_0 - 2 = 0$

$x_0 = 1$

$y_0 = 2$

$\to \xi = x-1$

$\eta = y-2$

$\to \eta' = \frac{\xi+1-(\eta+2)+1}{\xi+1+(\eta+2)-3} = \frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}$ ... homogenní

$= \frac{1-\frac{\eta}{\xi}}{1+\frac{\eta}{\xi}}$

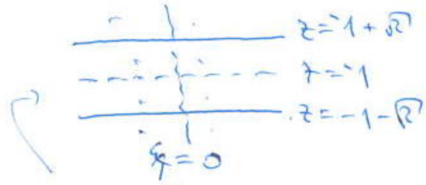
$\eta = \xi z$

$\to \xi z' + z = \frac{1-z}{1+z}$

$\xi z' = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-z-z-z^2}{1+z} = -\frac{z^2+2z-1}{1+z}$

$z' = -\frac{1}{\xi}\,\frac{z^2+2z-1}{1+z}$ $\quad z \neq -1$

$\xi \neq 0$



Slac. řešení? $z^2+2z-1=0$ pro $z = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$

$\frac{1+z}{z^2+2z-1}\, z' = -\frac{1}{\xi}$ $\qquad K>0$

$\int \frac{z+1}{z^2+2z-1}\,dz = \frac{1}{2}\int\frac{2z+2}{z^2+2z-1}\,dz = \frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = -\int\frac{d\xi}{\xi} = -\ln|\xi| + \frac{c}{2}$ $\quad + \frac{1}{2}\ln K$

$\to \frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = -\ln|\xi| + \frac{1}{2}\ln K$

$\ln|z^2+2z-1| = \ln\frac{K}{\xi^2}$

$|z^2+2z-1| = \frac{K}{\xi^2}$

$|z+1| > \sqrt{2}$

$z^2+2z-1 = \pm\frac{K}{\xi^2}$

$|z+1| < \sqrt{2}$

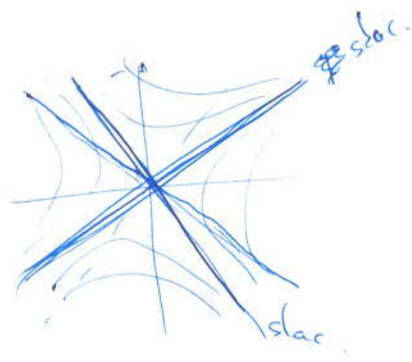
$z^2+2z-1 \mp \frac{K}{\xi^2} = 0$

$z_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\left(1\pm\frac{K}{\xi^2}\right)}}{2} = -1 \pm\sqrt{2\pm\frac{K}{\xi^2}}$

$\eta = \xi z = \xi\left(-1\pm\sqrt{2\pm\frac{K}{\xi^2}}\right)$

$\to y = 2 + (x-1)\left(-1\pm\sqrt{2\pm\frac{K}{(x-1)^2}}\right)$

Slac. řešení: $\eta = \xi(-1\pm\sqrt{2}) = \eta \approx \xi \begin{cases} 0.41 \\ -2.41 \end{cases}$



(24) $y' = \dfrac{1}{x+y-2} \longrightarrow z'-1 = \dfrac{1}{z} \longrightarrow \boxed{z' = 1+\frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}}$

separovaní proměnných

$\to z := x+y-2$

$z' = 1+y'$

$z \neq 0$

$z=-1$ stacionární řešení

$$\frac{zz'}{1+z} = 1$$

$$\int \frac{1+z-1}{1+z}\,dz = \int 1\,dz - \int \frac{dz}{1+z} = z - \ln|z+1| = \int dx = x+C$$

$$\ln(e^z) - \ln|z+1| = x+C$$

$$\ln\left(\frac{e^z}{|z+1|}\right) = x+C$$

, inverze " $\dfrac{e^z}{z+k}$ "

$$\underbrace{\frac{e^z}{|z+1|}}_{>0\ \forall z} = x+C \longrightarrow \frac{e^{x+y-2}}{|x+y-2+1|} = x+C$$

$\Rightarrow x+C>0$

$\underline{C>-x}$

$$\frac{e^z}{\pm(z+1)} \longrightarrow \frac{e^{x-2}e^{y}}{\pm(x+y-1)} = x+C \qquad \text{"}\left(\frac{e^y}{y+k}\right)^{-1}\text{"}$$

$z>-1$

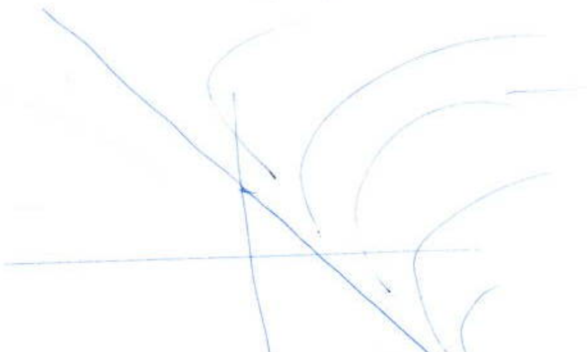
$z<-1$

$\to x+y-2>-1$

$x+y>1$

$y>1-x$

$y<1-x$



$y=1-x$

(25) $y' = \frac{2x+y+1}{\underbrace{4x+2y-3}_{2\cdot 2-4\cdot 1 \neq 0}} = \frac{2x+y-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1}{4x+2y-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{4x+2y-3}$

$z = 4x+2y-3 \to z' = 4+2y' \to y' = \frac{z'}{2}-2$

$\frac{z'}{2}-2 = \frac{1}{2}+\frac{5}{2z} \to z'-4 = 1+5\frac{1}{z} \to z' = 5+5\frac{1}{z}$

$z' = 5\,\frac{z+1}{z}$ $\qquad z \neq 0 \ldots 4x+2y \neq 3 \ldots y \neq \frac{3}{2}-\frac{2}{x}$

$z=-1$ je stac. řešení $\ldots 4x+2y-3=-1$

$2y = 2-4x$

$y = 1-2x$

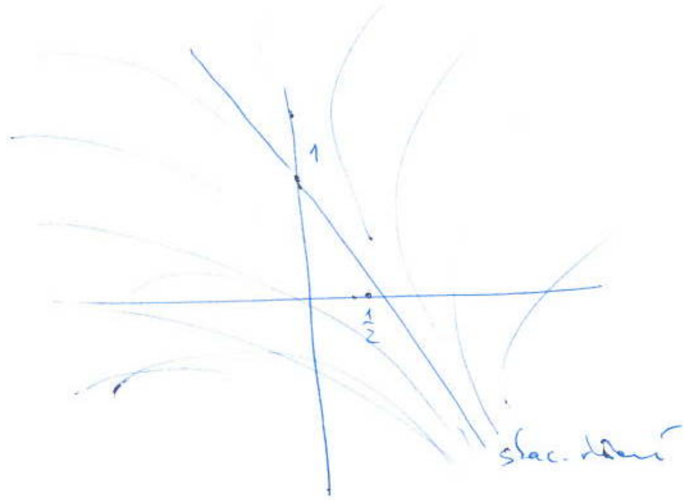
$\frac{zz'}{z+1} = 5$

$\int \frac{z}{z+1}\,dz = \int \frac{z+1-1}{z+1}\,dz = \int 1\,dz - \int \frac{dz}{z+1} = z - \ln|z+1|$

$= \int 5\,dx = 5(x+c)$

$z - \ln|z+1| = 5(x+c)$

$4x+2y-3 - \ln|4x+2y-2| = 5(x+c)$



(26) $y' = \frac{y+x}{x+3} - \ln \frac{y+x}{x+3}$ ... $y + x = 0$

$\underline{x = -3} \to y = -3$

$\cancel{1 \cdot 1} \; 1 \cdot 1 \neq 0 \cdot 1$ ✓

shift coordinates: $\xi = x+3$

$\eta = y-3$

$\to \eta' = \frac{\eta + \cancel{3} + \xi - \cancel{3}}{\xi - \cancel{3} + \cancel{3}} - \ln \frac{\xi + \eta}{\xi} \to \underbrace{\eta' = 1 + \frac{\eta}{\xi} - \ln\left(1 + \frac{\eta}{\xi}\right)}_{\text{homogenní}},$

$\to z = \frac{\eta}{\xi} \to \eta' = z + \xi z'$

ODR: $\xi z' + \cancel{z} = 1 + \cancel{z} - \ln(1+z)$

$z' = \frac{1 - \ln(1+z)}{\xi}$

$\xi \neq 0$

$z > -1$

stac. řešení: $1 = \ln(1+z)$

$e = 1+z$

$\underline{z = e-1}$

$\frac{z'}{1 - \ln(1+z)} = \frac{1}{\xi}$

$\int \frac{dz}{1-\ln(1+z)} = \underline{e\, E_1(\ln(z+1) - 1) = \int \frac{1}{\xi} d\xi = \ln|\xi| + c}$