

Funkce více proměnných

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Hledejte lokální extrémy následujících funkcí

1. $x^2 + y^2$; $x^2 - y^2$; $-x^2 - y^2$

2. $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

3. $(x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

4. $(2x^2 - xy + y^2/3 - 5x + 5y/3 + 10/3)e^{x+y}$

5.

$$f(x) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. $x + y + 4 \cos x \cos y$

7. $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$

8. $x - 2y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x \neq 0$

9. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

10. $(ax + by + cz)e^{-x^2-y^2-z^2}$.

Implicitní funkce

11. Dokažte, že existuje okolí V bodu $(1, 1)$ takové, že množina

$$\{(x, y); x^3 + y^3 - 2xy = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu 1. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

12. Dokažte, že existuje okolí V bodu $(3, -2, 2)$ takové, že množina

$$\{(x, y, z); z^3 - xz + y = 0\} \cap V$$

je grafem nějaké funkce, která je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $(3, -2)$. Spočtete $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(3, -2)$.

13. Spočtete parciální derivace 2. řádu funkce implicitně zadané vztahem $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.
14. Nalezněte první a druhý diferenciál funkce dané vztahem $z = x + \arctg \frac{y}{z-x}$.
15. Jsou-li $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$, $z = h(x, y)$ implicitně zadány vztahem $F(x, y, z) = 0$, ukažte, že $f_y g_z h_x = -1$.
16. Napište du a dv , je-li $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$.
17. Hledejte lokální extrémů funkce $z = z(x, y)$, dané implicitně vztahem

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$