Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Písemka č. 3, 5.1.2021, 12:20 – Řešení

1. (6 bodů) Pro funkci
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$$
určete:

(i) definiční obor, obor spojitosti

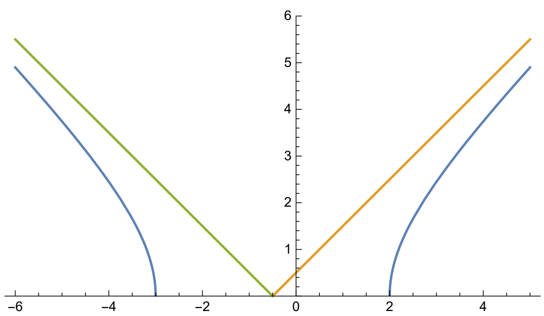
(ii) limity v krajních bodech D_f a v bodech nespojitosti

(iii) průsečíky s osami

(iv) první derivaci, intervaly monotonie, extrémy, jednostranné derivace v problematických bodech

(v) asymptoty

(vi) graf



Kvadratická funkce pod odmocninou se dá rozložit na $(x+3)(x-2)$, takže $D_f = (-\infty, -3\rangle \cup \langle 2, +\infty)$, v tomto oboru je f spojitá. Jednostranné limity v bodech $-3, 2$ jsou rovny funkčním hodnotám, v obou případech nule (to jsou zároveň jediné průsečíky s osou x), $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Dále $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-6}}$, což nemá nulový bod v D_f. Snadno zjistíme, že f klesá v $(-\infty, -3\rangle$ a roste v $\langle 2, +\infty)$, tedy body $[-3, 0], [2, 0]$ jsou globální extrémy a shora je funkce neomezená. Jednostranné derivace jsou $f'_-(-3) = -\infty$, $f'_+(2) = +\infty$. Asymptoty vypočteme takto:

$$a_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x} = \pm 1$$
$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-6} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-6-x^2}{\sqrt{x^2+x-6}+x} = \frac{1}{2}$$
$$b_- = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-6} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-6-x^2}{\sqrt{x^2+x-6}-x} = -\frac{1}{2}$$

Tedy v $+\infty$ má funkce asymptotu $y = x + \frac{1}{2}$, v $-\infty$ pak $y = -x - \frac{1}{2}$.

2. (4 body) Na základě znalosti Taylorových polynomů funkcí $\sin x, \cos x, \sqrt{1+x}$ určete Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}$$

stupně 3 v bodě 0 a spočtěte $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Vycházíme ze známých T.p.:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o(y^3)
\end{aligned}$$

Odsud odvodíme nejprve

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 + \frac{x - \frac{x^3}{6}}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{16} \right) x^3 + o(x^3).$$

Dále položíme $\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + o(x^3)$ (stačí liché členy, jelikož tangens je lichá funkce) a vztah $\sin x = \operatorname{tg} x \cos x$ přepíšeme jako

$$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \left(ax + bx^3 + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = ax + \left(b - \frac{a}{2} \right) x^3 + o(x^3),$$

odkud porovnáním koeficientů polynomů dostaneme $a = 1, b = \frac{1}{3}$. Dále

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} = 1 + \frac{x + \frac{x^3}{3}}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{16} \right) x^3 + o(x^3).$$

Při odečtení většina členů zmizí:

$$f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) x^3 + o(x^3) = \boxed{\frac{x^3}{4} + o(x^3)}$$

a tedy $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

V každém kroku si rozmyslete, jaký stupeň T.p. právě potřebujete a proč, a které členy se schovají do „o“.