Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Písemka č. 3, 5.1.2021, 9:00 – Řešení

1. (6 bodů) Pro funkci

$$f(x) = x - 2\sqrt[3]{x^2}$$

určete:

(i) definiční obor, obor spojitosti

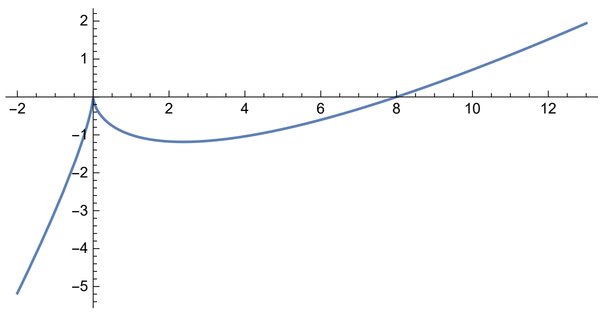
(ii) limity v krajních bodech D_f a v bodech nespojitosti

(iii) průsečíky s osami

(iv) první derivaci, intervaly monotonie, extrémy, jednostranné derivace v problematických bodech

(v) asymptoty

(vi) graf



Funkce je definovaná i spojitá v celém $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(1-2x^{-\frac{1}{3}}) = \pm\infty$. Kořeny najdeme úpravou $0 = x - 2\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - 2) \iff x = 0 \vee x = 8$. Dále $f'(x) = 1 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$ pro $x \neq 0$. Jednostranné derivace v nule jsou $f'_{\pm}(0) = \lim\limits_{x\to 0\pm} 1 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} = \mp\infty$. Stacionární bod najdeme jako řešení rovnice $1 - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} = 0$, vyjde $a = \frac{64}{27}$, funkční hodnota v něm je $-\frac{32}{27}$. Funkce roste v $(-\infty, 0)$, klesá v $(0, a)$, roste v $(a, +\infty)$. Při výpočtu asymptot vyjde $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, ale $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = -\infty$, takže asymptoty neexistují.

2. (4 body) Na základě znalosti Taylorových polynomů funkcí $\cos x, e^x$ určete Taylorův polynom funkce

$$f(x) = \cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})$$

stupně 4 v bodě 0 a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Vycházíme ze známých T.p.:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Odsud snadno odvodíme

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Poté dosadíme do cosinu:

$$\begin{aligned}
\cos(xe^x) &= 1 - \frac{(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3))^2}{2} + \frac{(x + o(x))^4}{24} = \\
&= 1 - \frac{(x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4))^2}{2} + \frac{x^4 + o(x^4)}{24} = \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{23}{24}x^4 + o(x^4) \\
\cos(xe^{-x}) &= 1 - \frac{(x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3))^2}{2} + \frac{(x + o(x))^4}{24} = \\
&= 1 - \frac{(x^2 - 2x^3 + 2x^4 + o(x^4))^2}{2} + \frac{x^4 + o(x^4)}{24} = \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{23}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

Po odečtení tedy $f(x) = \boxed{-2x^3 + o(x^4)}$ a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \boxed{-2}$.

V každém kroku si rozmyslete, jaký stupeň T.p. právě potřebujete a proč, a které členy se schovají do „o“.