Matematická analýza NOFY151, ZS 20/21, Cvičení s L. Krumpem

Písemka č. 2, 1.12.2020, 12:20 – Řešení

1. (4 body) Určete derivaci funkce

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

ve všech bodech, kde existuje, včetně jednostranných derivací.

Snadno zjistíme, že pro každé reálné x je $1 \leq 1 + x^2$, takže $D_f = \mathbb{R}$. Zderivujeme:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-1}{(1+x^2)^2}}(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2+x^4}(1+x^2)} = \frac{2\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2+x^2}(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Tato derivace ovšem není definována v bodě 0, protože v posledním kroku jsme krátili $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \operatorname{sgn}(x)$. Proto počítáme jednostranné derivace v nule jako limity $f'(x)$, kde do jmenovatele stačí dosadit $x = 0$ a ihned máme

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{2\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2+x^2}(1+x^2)} = \pm\sqrt{2}.$$

Většině z vás nečinilo problém spočítat derivaci v „běžných bodech“, i když několik z vás nedokázalo ani to, buď jste neznali (nebo neuměli použít) chain rule pro derivaci složené funkce, případně jste tam měli početní chyby. Ty pak vedly buď k tomu, že jste neobjevili problematický bod $x = 0$, nebo že jste v něm spočítali limity špatně.

Hodnotil jsem takto: derivace v běžném bodě: 1b, nalezení $D_f, D_{f'}$: 1b, výpočet $f'_{\pm}(0)$: 2b.

2. (6 bodů) Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{e^{3x}+4e^x}{e^{2x}-4}dx$$

na maximálních možných intervalech a určete tyto intervaly.

Volíme substituci $y = e^x, dy = e^x dx$, takže zadaný integrál převádíme na

$$\int \frac{y^2+4}{y^2-4}dy.$$

To je racionální funkce, která má v čitateli stejný stupeň než ve jmenovateli, takže napřed musíme vhodnou úpravou stupeň čitatele snížit. Obecně se to dá dělat dělením polynomů, tady se to dá „vykoukat", tj. odečíst a přičíst v čitateli šikovný člen tak, aby se nám to krátilo:

$$\int \frac{y^2+4}{y^2-4}dy = \int \left(\frac{y^2-4}{y^2-4} + \frac{8}{y^2-4} \right) dy = \int \left(1 + \frac{8}{y^2-4} \right) dy.$$

Teprve na poslední zlomek můžeme aplikovat rozklad na parciální zlomky, který zde vyjde

$$\frac{8}{y^2-4} = \frac{2}{y-2} - \frac{2}{y+2},$$

takže máme

$$\int \left(1 + \frac{2}{y-2} - \frac{2}{y+2} \right) dy = y + 2\ln|y-2| - 2\ln|y+2| + c$$

a hledaná primitivní funkce bude

$$e^x + 2\ln\left|\frac{e^x-2}{e^x+2}\right| + c.$$

Intervaly, na nichž je definovaná původní i primitivní funkce, jsou $(-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$.

Skoro každý z vás zvolil správnou substituci. Nejvíce opakovanou chybou bylo ale to, že jste nesnížili stupeň polynomu v čitateli a snažili jste se aplikovat rozklad na parc. zlomky na celý zlomek $\frac{y^2+4}{y^2-4}$, což nejde. To můžete udělat pouze když má čitatel menší stupeň než jmenovatel. Většinou jste mechanicky použili zakrývací metodu, vyšla vám hezká čísla v čitatelích a s nimi jste to pak „dopočítali". Kdybyste si však pro kontrolu oba zlomky sečetli, zjistili byste svůj omyl. Také jste někdy zapomínali na intervaly platnosti nebo jste je měli chybně.

Hodnotil jsem takto: substituce: 1b, odečtení členů vysokého stupně v čitateli: 1b, rozklad na parc. zlomky: 1b, výpočet integrálu substituované funkce: 1b, dosazení a získání integrálu původní funkce: 1b, intervaly: 1b.

Lukáš Krump, 7.12.2020